Exercice à travailler n° 16

PTSI B Lycée Eiffel

pour le 8 mars 2021

Étude d'une famille de polynômes.

Les polynômes de Laguerre sont définis de la façon suivante : pour tout entier naturel n, on pose $L_n = \dfrac{e^x}{n!} f_n^{(n)}(x)$, où on a posé $f_n(x) = x^n e^{-x}$.

1. Calculer L_0, L_1, L_2 et L_3.
2. Déterminer les racines de L_1 et de L_2. Montrer que L_3 admet trois racines réelles distinctes, toutes positives.
3. En partant de la relation $f_{n+1}(x) = x f_n(x)$ et en lui appliquant la formule de Leibniz, exprimer L_{n+1} en fonction de L_n et de L_n'.
4. Déduire des deux questions précédentes la relation $L_{n+1}' = L_n' - L_n$.
5. Montrer que L_n est solution de l'équation différentielle $xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$ (on pourra pour cela exploiter les résultats des questions précédentes, ou faire un calcul nettement plus brutal en calculant explicitement L_n à l'aide de la formule de Leibniz).
6. Montrer que les polynômes L_n et L_{n+1} ne peuvent pas avoir de racine commune, et que L_n n'a jamais de racine multiple.
7. Pour les motivés qui veulent encore calculer : montrer que les polynômes L_n vérifient la relation de récurrence $(n+2)L_{n+2}(X) + (X - 2n - 3)L_{n+1}(X) + (n+1)L_n(X) = 0$.