Exercice à travailler n° 16

PTSI B Lycée Eiffel

26 février 2021

Un classique des suites récurrentes.

1. Mon tout bête programme maison :

```
import matplotlib.pyplot as plt
def logistique(x,k) :
    abscisses=[i/1000.0 for i in range(1001)]
    def f(a) :
        return k*a*(1-a)
    ordonnees=[f(i) for i in abscisses]
    plt.plot(abscisses,abscisses)
    plt.plot(abscisses,ordonnees)
    l1=[x]
    l2=[0]
    for i in range(30) :
        y=f(x)
        l1.append(x)
        l2.append(y)
        l1.append(y)
        l2.append(y)
        x=y
    plt.plot(l1,l2)
    return l1
```

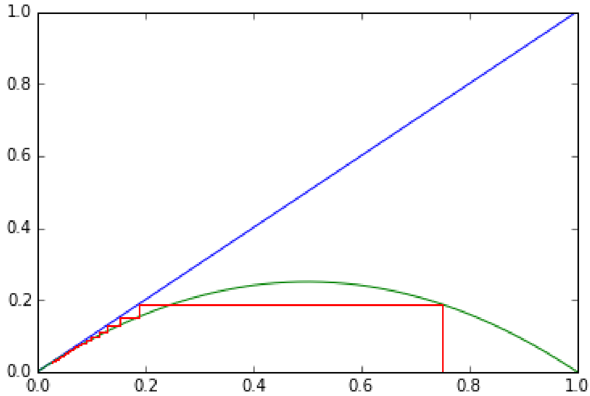
2. (a) On a donc pour l'instant $f(x) = x(1-x) = x - x^2$. La fonction est dérivable sur $[0,1]$, de dérivée $f'(x) = 1 - 2x$, et on peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0
$f(x) - x$	0	$+$		$+$	

Le signe de $f(x) - x$ est ici évident, le seul point fixe est $x = 0$.

(b) L'intervalle $[0,1]$ étant stable par f (d'après le tableau de variations précédent, on a $f([0,1]) = \left[0, \frac{1}{4}\right] \subset [0,1]$), on aura toujours $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ (récurrence évidente), et donc toujours $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leqslant 0$. La suite est donc décroissante et minorée par 0, elle converge donc. Comme 0 est le seul point fixe de f, on a nécessairement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Une illustration (issue de mon programme Python) lorsque $u_0 = \dfrac{3}{4}$:



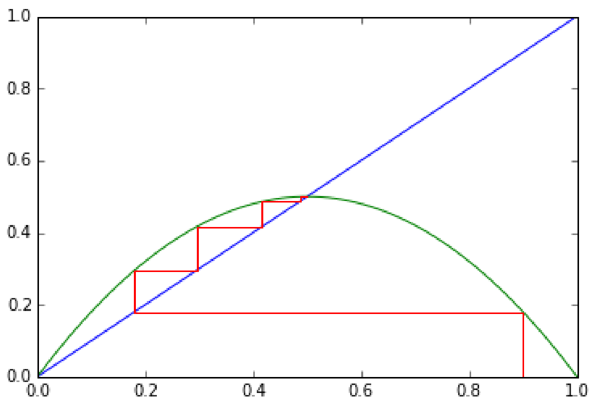
3. (a) Cette fois-ci, $f(x) = 2x - 2x^2$, et $f'(x) = 2 - 4x$. En fait, on peut d'ores et déjà constater que le signe de $f'(x)$ ne dépend absolument pas de la valeur de k, seul le maximum de la fonction changera, ainsi que le signe de $f(x) - x$. Ici, $f(x) - x = x - 2x^2$ s'annule quand $x = 0$ et quand $x = \frac{1}{2}$, avec un signe positif entre ces deux racines, d'où le tableau suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0
$f(x) - x$	0	$+$	0	$-$	

(b) Si $u_0 = 0$, la suite sera constante égale à 0 puisqu'il s'agit d'un poin fixe. Si $u_0 = 1$, on aura $u_1 = f(1) = 0$, et la suite va donc stationner à 0 à partir du rang 1.

(c) La stabilité de l'intervalle est évidente vues les variations de f : la fonction est croissante et 0 et $\frac{1}{2}$ sont deux points fixes, donc $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Si u_0 se trouve dans cet intervalle, ce sera donc aussi le cas de tous les autres termes de la suite (récurrence triviale), et on aura $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geqslant 0$, donc la suite est croissante. Étant majorée par $\frac{1}{2}$, elle converge donc, et sa limite est égale à $\frac{1}{2}$ (on ne peut pas converger vers 0 en partant de $u_0 > 0$ pour une suite croissante).

(d) Dans ce cas, $u_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, et la suite devient donc croissante à partir du rang 1, et convergera de même vers $\frac{1}{2}$. Une illustration, cette fois en partant de $u_0 = \frac{9}{10}$:



4. (a) Les variations n'ont toujours pas changé, le maximum de f valant maintenant 1. Les points fixes sont désormais obtenues en résolvant l'équation $3x - 4x^2 = 0$, donc on a comme points fixes $x = 0$ et $x = \frac{3}{4}$. De plus, $f'(0) = 4$ (cette valeur ne sera pas vraiment utilisée par la suite, mais le fait qu'elle soit (largement) plus grande que 1 explique que 0 est un point fixe répulsif, donc que la suite (u_n) ne va pas pouvoir tendre vers 0, sauf dans le cas d'une suite stationnaire.

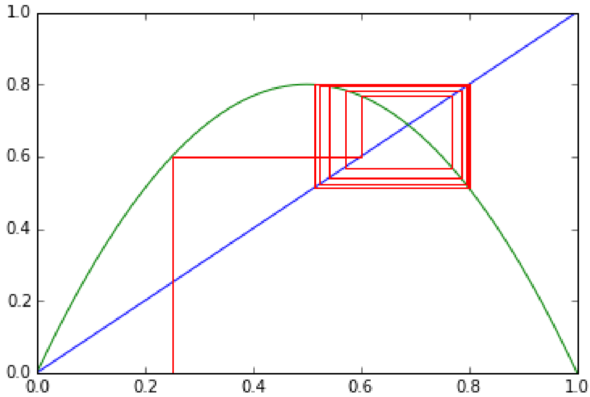
   (b) En effet, le signe de $f(x) - x$ est, comme précédemment, positif entre les deux points fixes, donc sur tout l'intervalle $\left[0, \frac{3}{4}\right]$. L'énoncé était imprécis, si on veut une inégalité stricte $f(x) > x$, il faut bien sûr prendre un intervalle ouvert du côté de 0. Par l'absurde, supposons donc que la suite (u_n) tende vers 0 en ne prenant jamais la valeur 0. Alors, en appliquant la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe un entier n_0 à partir duquel on aura toujours $0 < u_n \leqslant \frac{1}{2}$. Mais dans ce cas, $\forall n \geqslant n_0$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$, donc la suite est strictement croissante à partir du rang n_0. On a donc nécessairement $u_n > u_{n_0} > 0$, ce qui est contradictoire avec une limite nulle (si (u_n) converge, sa limite sera supérieure ou égale à u_{n_0}). Notre hypothèse est donc impossible : si (u_n) tend vers 0, c'est qu'on aura nécessairement $u_{n_0} = 0$ pour un certain entier n_0.

   (c) C'est déjà le cas si $u_0 = 0$ (suite constante) ou $u_0 = 1$ (suite stationnaire à 0 à partir du rang 1). Mais cela se produira aussi si $u_0 = \frac{1}{2}$, puisque dans ce cas $u_1 = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, puis la suite devient stationnaire à 0 à partir du rang 2. Ce sera aussi le cas si u_0 est un antécédent de $\frac{1}{2}$, ou un antécédent de cet antécédent etc. Or, tout nombre compris entre 0 (exclus) et 1 admet un antécédent par f qui est strictement positif et strictement plus petit que lui, ce qui permet de construire de proche en proche une infinité de valeurs de u_0 pour lesquelles la suite va finir par prendre la valeur 1, puis stationner à 0. Concrètement, en notant g la réciproque de la fonction f restreinte à l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, g effectue une bijection de $]0, 1]$ vers $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. La suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et la relation de récurrence $v_{n+1} = g(v_n)$ prendra des valeurs toutes distinctes et qui correspondent toutes à des valeurs de u_0 pour lesquelles la suite stationne à 0.

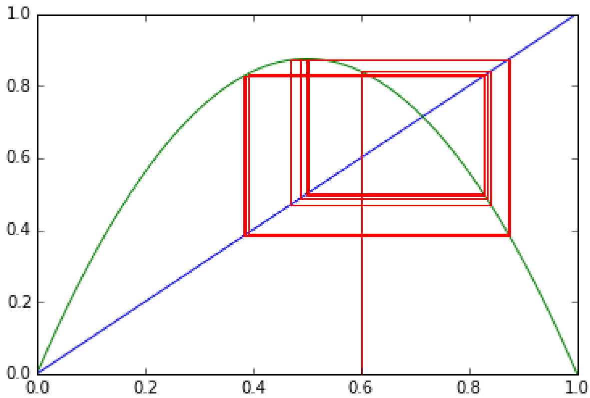
   (d) Dans ce cas, $u_1 = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\left(1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = \left(2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^2 = \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ en exploitant la formule de duplication bien connue $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$. Le même calcul montre que $u_2 = \sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, mais en fait $u_2 = u_0$ puisque $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$. La suite sera donc périodique de période 2.

   (e) Non, sûrement pas, puisque l'intervalle $[0, 1]$ reste stable par f, donc tous les termes de la suite vont rester dans l'intervalle $[0, 1]$ (toujours la même récurrence triviale). Une suite bornée ne peut pas avoir une limite infinie.

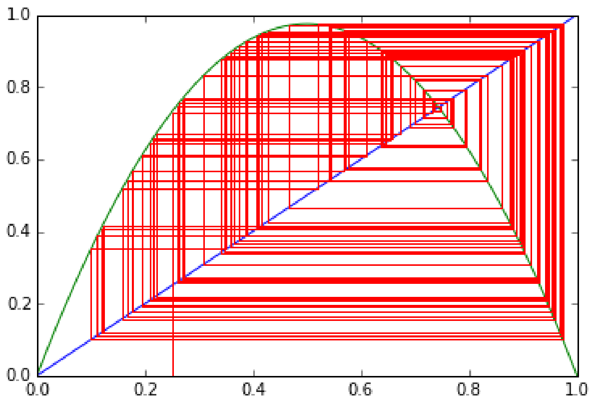
Quelques exemples supplémentaires avec des valeurs de k non entières, en pratique le comportement de la suite devient de plus imprévisible quand k varie dans l'intervalle $[3, 4]$ (pour $k < 3$, la suite va toujours converger vers un de ses points fixes, puis on voit apparaitre progressivement des « cycles » de période 2, puis de période 4 puis des choses de plus en plus étranges quand on est en gros dans l'intervalle $[3.75, 4]$ pour le paramètre k). Par exemple, pour $u_0 = \frac{1}{4}$ et $k = 3.2$, on a un cas typique de « rapprochement d'une suite périodique de période 2 » :



Avec $u_0 = 0.6$ et $k = 3.5$, on se rapproche très vite d'un cycle de période 4 (sur ce graphique et les deux qui l'entourent, on a représenté les 100 premiers termes de la suite et pas seulement les 30 premiers) :



Enfin, un cas typique de « chaos total » quand $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et $k = 3.9$:



5. (a) Les variations de f sont toujours les mêmes, mais le maximum est désormais de valeur $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2}$. Il faut donc résoudre l'équation $f(x) = 1$ pour déterminer l'intervalle sur lequel on va « déborder ». L'équation $6x^2 - 6x + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 36 - 24 = 12$ et admet donc pour racines $x_1 = \dfrac{6 - \sqrt{12}}{12} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, et $x_2 = \dfrac{6 + \sqrt{12}}{12} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. Ces deux valeurs sont bien comprises entre 0 et 1, et $f(x) > 1$ si $x \in]x_1, x_2[$.

(b) Si u_0 appartient à cet intervalle, on aura $u_1 > 1$ et donc $u_2 < 0$. Or, l'intervalle $]-\infty, 0[$ est stable par f, et sur cet intervalle on a toujours $f(x) < x$. La suite va donc être à valeurs négatives à partir du range 2 (récurrence triviale), et strictement décroissante à partir de u_2. Comme il n'existe pas de point fixe strictement négatif, la suite ne peut pas être minorée (sinon elle convergerait), donc elle tend nécessairement vers $-\infty$.

Montrer que, pour toutes ces valeurs initiales, la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

(c) C'est le même principe que plus haut : si $u_0 = x_1$ ou $u_0 = x_2$, la suite va stationner à 0 à partir du rang 2. Mais si u_0 est un antécédent de x_1, ou un antécédent de cet antécédent etc, ce sera pareil (on stationnera seulement un peu plus tard). Or, comme précédemment, tout nombre α compris entre 0 et 1 amdet toujours un antécédent dans l'intervalle $]0, \alpha[$, on conclut exactement de la même façon.

(d) Le point fixe en question vaut $\frac{5}{6}$, mais comme Python arrondit la valeur, il finit par s'éloigner de la suite constante qu'on devrait théoriquement avoir, et même au point de finir par se retrouver en-dessous de 0, et donc de donner des valeurs divergeant vers $+\infty$. Le même phénomène se produi si on prend par exemple $u_0 = x_1$.