Exercice à travailler n° 16

PTSI B Lycée Eiffel

pour le 26 février 2021

Un classique des suites récurrentes.

On va s'intéresser dans cet exercice à toutes les suites définies par des relations de récurrence du type $u_{n+1} = ku_n(1-u_n)$, avec $u_0 \in [0,1]$ et k un réel positif fixé. En pratique, on se contentera d'une étude dans les cas particuliers $k=1$, $k=2$, $k=4$ et $k=6$, mais les cas intermédiaires auraient des comportements assez similaires. On notera dans tout l'exercice $f(x) = kx(1-x)$, la fonction f étant donc différente d'une question à l'autre puisque la valeur de k va changer.

1. Écrire une fonction Python prenant comme paramètres un réel u (qui correspondra à la valeur initiale de la suite) et un autre réel k et qui trace dans un même repère (à l'aide du module matplotlib.pyplot) la représentation graphique de la fonction f (avec la valeur de k choisie par l'utilisateur), la droite $y = x$ et les 30 premiers termes de la suite (u_n) lorsque $u_0 = u$. Si vraiment on est trop mauvais en Python pour y arriver, on se contentera de faire un dessin dans chacun des cas étudiés.
2. Étude du cas $k = 1$.
   (a) Étudier la fonction f sur l'intervalle $[0,1]$, en précisant les points fixes éventuels et le signe de $f(x)-x$ (un petit graphique ne fera pas de mal même si on a fait le programme Python demandé à la question précédente).
   (b) Montrer que, quelle que soit la valeur de u_0, la suite (u_n) est monotone et convergente, et préciser sa limite.
3. Étude du cas $k = 2$.
   (a) Étudier la fonction f sur l'intervalle $[0,1]$, en précisant les points fixes éventuels et le signe de $f(x) - x$ (là encore, un petit graphique aidera).
   (b) Que se passe-t-il lorsque $u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$?
   (c) Montrer que l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ est stable par f. En déduire que, si $u_0 \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, la suite (u_n) sera monotone et convergera.
   (d) Que se passe-t-il si $\frac{1}{2} < u_0 < 1$?
4. Étude du cas $k = 4$.
   (a) Déterminer les variations (toujours sur $[0,1]$) et points fixes de f, ainsi que la valeur de $f'(0)$.
   (b) Montrer que, si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f(x) > x$. En déduire que la suite (u_n) ne peut converger vers 0 que s'il existe un entier n pour lequel $u_n = 0$ (question difficile).
   (c) Montrer qu'il existe une infinité de valeurs de u_0 pour lesquelles la suite (u_n) va être stationnaire et converger vers 0 (question assez difficile également).
   (d) Montrer que, si $u_0 = \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$, la suite (u_n) est périodique (la période n'est pas grande...) et donc ne converge pas.

(e) La suite (u_n) peut-elle tendre vers $\pm\infty$ (en supposant comme toujours $u_0 \in [0,1]$) ?

On peut en fait prouver que, pour $k = 4$, si on exclut l'infinité de valeurs initiales pour lesquelles la suite sera stationnaire (égale à 0 ou à $\frac{3}{4}$ à partir d'un certain rang), la suite ne converge jamais, mais qu'on peut « converger vers une suite périodique », c'est-à-dire par exemple que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) peuvent converger vers deux limites différentes correspondant à des valeurs de u_0 pour lesquelles la suite serait périodique de période 2.

5. Étude du cas $k = 6$.

   (a) Déterminer les valeurs de x appartenant à l'intervalle $[0,1]$ pour lesquelles $f(x) \notin [0,1]$.

   (b) Montrer que, pour toutes ces valeurs initiales, la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

   (c) Montrer qu'il existe cependant une infinité de valeurs initiales pour lesquelles la suite converge.

   (d) Tester votre programme Python avec pour valeur initiale une valeur pour laquelle la suite est censée converger (par exemple la valeur du point fixe autre que 0) et constater que Python n'est pas vraiment infaillible.