

Exercice à travailler n° 15 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

1er février 2021

Une étude de suite implicite.

1. La fonction f_n est continue et dérivable sur $[0, 1]$, de dérivée $f'_n(x) = -\frac{1}{2} - nx^{n-1} < 0$. La fonction est donc strictement décroissante et (étant continue) bijective de $[0, 1]$ vers $[f_n(1), f_n(0)]$. Comme $f_n(1) = -\frac{1}{2}$ et $f_n(0) = 1$, le réel 0 est compris entre $f_n(0)$ et $f_n(1)$ et admet un unique antécédent par la fonction f_n .
2. Par définition, $f_n(u_n) = 0$, donc $1 - \frac{u_n}{2} - u_n^n = 0$. On en déduit que $f_{n+1}(u_n) = 1 - \frac{u_n}{2} - u_n^{n+1} = u_n^n - u_n^{n+1} = u_n^n(1 - u_n)$. L'encadrement $0 < u_n < 1$ permet alors de conclure que $f_{n+1}(u_n) > 0$.
3. On sait par ailleurs que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ (toujours la définition de la suite), donc $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$. La décroissance de la fonction assure alors que $u_n < u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante, et comme elle est majorée par 1, converge donc d'après le théorème de convergence monotone.
4. Notons l la limite de la suite (u_n) , nécessairement comprise entre 0 et 1. Si $l < 1$, comme la suite (u_n) est croissante, on aura toujours $u_n < l$, donc $0 < u_n^n < l^n$, et (d'après le théorème des gendarmes) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 0$. Or, en faisant passer à la limite la relation $1 - \frac{u_n}{2} - u_n^n = 0$, on obtiendrait alors $1 - \frac{l}{2} = 0$, donc $l = 2$, ce qui est complètement absurde. On en déduit que $l = 1$.

Bonus : La fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$, et continue sur tous les intervalles de la forme $\left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[$ (lorsque $n > 0$), et sur les intervalles de la forme $\left] \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \right[$ (lorsque $n < -1$). Il faut étudier pour chaque inverse d'entier la limite à gauche et à droite pour voir ce qui s'y passe. Plus précisément :

- sur $]1, +\infty[$, on aura $\frac{1}{x} \in]0, 1[$, donc $f(x) = 0$. En particulier, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$.
- sur $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$, on aura $\frac{1}{x} \in]1, 2[$, donc $f(x) = x$. En particulier, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 1$. La fonction n'est donc pas continue en 1.
- sur $\left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right[$, on aura $\frac{1}{x} \in]2, 3[$, donc $f(x) = 2x$. En particulier, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} f(x) = \frac{2}{3}$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. La fonction n'est donc pas continue en $\frac{1}{2}$.
- de même on aura $f(x) = nx$ sur l'intervalle $\left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[$ et la fonction n'est jamais continue en $\frac{1}{n}$ (limite égale à 1 à droite et $\frac{n-1}{n}$ à gauche. La fonction est continue à gauche en tous ces points.

- sur $] -\infty, -1[$, on aura $f(x) = -x$, avec une limite -1 à gauche en -1 (et une fonction continue à gauche en ce point).
- sur $] -1, -\frac{1}{2}[$, on a $f(x) = -2x$, avec une limite -2 à droite en -1 (pas de continuité en -1) et à nouveau -1 à gauche en $-\frac{1}{2}$.
- à nouveau ces considérations se généralisent, on a notamment $f(x) = nx$ sur $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$ quand $n < 0$.
- on peut par contre remarquer que la fonction est prolongeable par continuité en 0 , car $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Une allure de courbe (les segments verticaux ne devraient pas être tracés, ils ne font pas partie de la courbe) :

