

## Exercice à travailler n° 15

PTSI B Lycée Eiffel

pour le 1er février 2021

### Une étude de suite implicite.

On définit pour tout entier naturel  $n \geq 1$  une fonction  $f_n$  sur l'intervalle  $[0, 1]$  par  $f_n(x) = 1 - \frac{x}{2} - x^n$ .

1. Montrer que la fonction  $f_n$  s'annule une seule fois sur son intervalle de définition. On notera désormais  $u_n$  l'unique réel vérifiant  $f_n(u_n) = 0$ .
2. Montrer que  $f_{n+1}(u_n) > 0$ .
3. En déduire la monotonie, puis la convergence de la suite  $(u_n)$ .
4. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que la limite de la suite  $(u_n)$  est nécessairement égale à 1.

Et en guise de bonus (rien à voir avec l'exercice ci-dessus), étudier la continuité de la fonction  $x \mapsto x \operatorname{Ent} \left( \frac{1}{x} \right)$  (on veut savoir précisément quels sont les valeurs de  $x$  pour lesquelles la fonction est continue à gauche, à droite, ou continue tout court). On pourra même essayer de tracer une allure de la courbe représentative de cette drôle de fonction.