

Exercice à travailler n° 14

PTSI B Lycée Eiffel

pour le 25 janvier 2021

Un exercice bateau de calcul matriciel.

On s'intéresse dans tout cet exercice à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 , A^3 et A^4 , et déterminer deux réels a et b tels que $A^3 = aA^2 + bA$.
2. La matrice A est-elle inversible (justifiez votre affirmation) ?
3. Première méthode de calcul des puissances de A .
 - (a) Prouver par récurrence l'existence de deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = a_n A^2 + b_n A$.
 - (b) Calculer a_n et b_n en exploitant des suites récurrentes linéaires d'ordre 2, en déduire A^n .
 - (c) Ecrire explicitement la matrice A^7 .
4. Deuxième méthode de calcul des puissances de A .
 - (a) Montrer par récurrence l'existence d'une suite (u_n) telle que, $\forall n \geq 1$, on aura $A^n = \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n & u_n \\ u_{n+1} & u_n & u_n \end{pmatrix}$ (forme qu'on peut deviner après avoir calculé les premières puissances de A).
 - (b) À l'aide de la relation de récurrence obtenue à la question précédente, trouver une formule explicite pour u_n , et en déduire A^n .
5. Déterminer toutes les matrices B commutant avec A (on essaiera de les écrire sous la forme la plus simple possible, en utilisant notamment le moins de variables possible).