Exercice à travailler n° 12

PTSI B Lycée Eiffel

pour le 12 janvier 2021

Éléments d'étude de la série harmonique.

La série harmonique (nous verrons en fin d'année ce que désigne exactement le terme de **série**, aucune connaissance à ce sujet n'est évidemment nécessaire pour résoudre cet exercice) est la suite (H_n) dont le terme général est défini par $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (pour $n \geqslant 1$).

1. Divergence de la suite (H_n).
   (a) Déterminer la monotonie de la suite (H_n).
   (b) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.
   (c) Conclure quant à la nature de la suite (H_n).
2. On pose pour cette question $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.
   (a) Calculer les trois premiers termes de chaque suite.
   (b) Prouver que les deux suites sont adjacentes, et en déduire la convergence de (v_n).
3. Équivalent du terme général H_n de la série harmonique.
   (a) Montrer que, $\forall k \geqslant 1$, l'encadrement $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$ est valable (on pourra ici s'intéresser à des histoires d'intégrales, ou plus simplement étudier le signe de fonctions bien choisies).
   (b) En déduire que $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$, puis montrer que $\lim_{n \to +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$.
   (c) En posant $a_n = H_n - \ln(n)$ et $b_n = H_n - \ln(n+1)$, montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, et en déduire que $(H_n - \ln(n))$ admet une limite finie (connue par les mathématiciens sous le nom de constante d'Euler, et habituellement notée γ).
   (d) Montrer rigoureusement que la suite (v_n) introduite à la question 2 a pour limite $\ln(2)$ (on pourra commencer par écrire que $v_n = H_{2n} - H_n$).