

## Exercice à travailler n° 10

PTSI B Lycée Eiffel

pour le 7 décembre 2020

### Étude géométrique d'une fonction complexe classique.

On s'intéresse dans cet exercice à la fonction définie sur  $\mathbb{C}^*$  par  $f(z) = \frac{z}{2} - \frac{1}{2z}$ .

1. Calculer  $f(2)$ ,  $f(i)$ ,  $f(2+i)$  et  $f(1-i)$ .
2. Déterminer les antécédents par  $f$  des nombres  $0$ ,  $i$  et  $-2i$ .
3. Déterminer les valeurs invariantes par  $f$ , c'est-à-dire les nombres complexes  $z$  vérifiant  $f(z) = z$ .
4. Montrer que l'image d'un nombre complexe de module 1 est toujours imaginaire pure.
5. Montrer que l'application  $f$  est surjective.
6. Déterminer (et représenter graphiquement) l'ensemble des points dont l'affixe  $z$  vérifie  $f(z) \in \mathbb{R}$ .
7. Déterminer (et représenter graphiquement) l'ensemble des points dont l'affixe  $z$  vérifie  $f(z) \in i\mathbb{R}$ .