Feuille d'exercices n° 12 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

25 février 2021

Exercice 1 (*)

On obtient plus ou moins péniblement :

- $P + Q = 2X^3 - X^2 + 8X - 1$
- $PQ = -2X^5 + 6X^4 - 5X^3 + 16X^2 - 3X$
- $P^2 = (2X^3 + 5X - 1)^2 = 4X^6 + 25X^2 + 1 + 20X^4 - 4X^3 - 10X = 4X^6 + 20X^4 - 4X^3 + 25X^2 - 10X + 1$
- $P(X^2) = 2(X^2)^3 + 5(X^2) - 1 = 2X^6 + 5X^2 - 1$
- $P \circ Q = 2(-X^2+3X)^3 + 5(-X^2+3X) - 1 = -2X^6 + 18X^5 - 54X^4 + 54X^3 - 5X^2 + 15X - 1$
- $Q \circ P = -(2X^3+5X-1)^2 + 3(2X^3+5X-1) = -(4X^6 + 20X^4 - 4X^3 + 25X^2 - 10X + 1) + 6X^3 + 15X - 3 = -4X^6 - 20X^4 + 10X^3 - 25X^2 + 25X - 4$
- $3P^3Q - Q \circ P^2 = 3(2X^3+5X-1)^3(-X^2+3X) + (4X^6 + 20X^4 - 4X^3 + 25X^2 - 10X + 1)^2 - 3(4X^6 + 20X^4 - 4X^3 + 25X^2 - 10X + 1)$
  $= (8X^9 + 125X^3 - 1 + 60X^7 + 150X^5 - 12X^6 + 6X^3 - 75X^2 + 15X - 60X^4)(-3X^2 + 9X) + (16X^{12} + 400X^8 + 16X^6 + 625X^4 + 100X^2 + 1 + 160X^{10} - 32X^9 + 200X^8 - 80X^7 + 8X^6 - 160X^7 + 1\,000X^6 - 400X^5 + 40X^4 - 200X^5 + 80X^4 - 8X^3 - 500X^3 + 50X^2 - 20X) - 12X^6 - 60X^4 + 12X^3 - 75X^2 + 30X - 3$
  $= (8X^9 + 60X^7 - 12X^6 + 150X^5 - 60X^4 + 131X^3 - 75X^2 + 15X - 1)(-3X^2 + 9X) + 16X^{12} + 160X^{10} - 32X^9 + 600X^8 - 240X^7 + 1\,012X^6 - 600X^5 + 685X^4 - 496X^3 + 75X^2 + 10X - 2$
  $= (-24X^{11} + 72X^{10} - 180X^9 + 540X^8 + 36X^8 - 108X^7 - 450X^7 + 1\,350X^6 + 180X^6 - 540X^5 - 393X^5 + 1\,179X^4 + 225X^4 - 675X^3 - 45X^3 + 135X^2 + 3X^2 - 9X) + 16X^{12} + 160X^{10} - 32X^9 + 600X^8 - 240X^7 + 1\,012X^6 - 600X^5 + 685X^4 - 496X^3 + 75X^2 + 10X - 2$
  $= 16X^{12} - 24X^{11} + 232X^{10} - 212X^9 + 1\,176X^8 - 798X^7 + 2\,542X^6 - 1\,533X^5 + 2\,089X^4 - 1\,216X^3 + 213X^2 + X - 2$
  Calcul garanti fait main, et tout de même (j'avoue) vérifié ensuite à la machine, il y avait une toute petite erreur...

Exercice 2 (*)

1. Il y a une racine très évidente qui est 1. On peut aussi constater (par exemple en jetant un oeil à l'énoncé de la question suivante) que -2 est racine de P : $P(-2) = -8 - 2\times 4 - 5\times(-2) + 6 = 0$.
2. On peut donc factoriser P sous la forme $P(X) = (X+2)Q(X) = (X+2)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (2a+b)X^2 + (2b+c)X + 2c$. Par identification, on obtient $a = 1$; $2a + b = -2$; $2b + c = -5$ et $2c = 6$, donc $a = 1$; $b = -4$ et $c = 3$, soit $P(X) = (X+2)(X^2 - 4X + 3)$.
3. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$ et pour racines $x_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ (tiens, on a retrouvé notre autre racine évidente) et $x_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$. On a donc $P(X) = (X+1)(X-1)(X-3)$, d'où le tableau de signes suivant :

x		-2		1		3	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

4. La première inéquation se ramène au tableau de signe précédent en posant $X = \ln x$. On en déduit que $X \in]-2;1[\cup]3;+\infty[$, donc $\mathcal{S} =]e^{-2};e[\cup]e^3;+\infty[$. Pour la deuxième, on peut tout multiplier par e^x (qui est toujours strictement positif) et tout passer à gauche pour obtenir $e^{3x} - 2e^{2x} - 5e^x + 6 \leqslant 0$, ce qui se ramène encore une fois au tableau précédent en posant cette fois-ci $X = e^x$ (ce qui suppose donc $X > 0$). On obtient $X \in [1;3]$ (on peut oublier l'autre intervalle puisque $X \geqslant 0$), soit $\mathcal{S} = [0;\ln 3]$.

Exercice 3 (* à ***)

1. On est capable de calculer toutes les racines (complexes) du polynôme, qui sont les racines sixièmes du nombre $-1 = e^{i\pi}$: elles ont toutes un module 1 et un argument vérifiant $6\theta \equiv \pi[2\pi]$, donc $\theta \equiv \frac{\pi}{6}\left[\frac{\pi}{3}\right]$. On peut même toutes les écrire sous forme algébrique : $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et les conjugués $z_4 = e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_5 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$ et enfin $z_6 = e^{i\frac{11\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Autrement dit, dans $\mathbb{C}[X]$, $X^6 + 1 = (X-i)(X+i)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$. Pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe chaque racine avec son conjugué pour trouver trois facteurs irréductibles de degré 2 : $X^6 + 1 = (X^2+1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$.
2. Pour chercher la racine double, il est un peu plus simple de chercher directement les racines du polynôme dérivée $P' = 4X^3 - 15X^2 + 8X + 3$. On constate que 1 est racine évidente, mais malheureusement 1 n'est pas racine de P puisque $1 - 5 + 4 + 3 + 9 \neq 0$. On enchaîne avec 2, mais $P'(2) = 32 - 60 + 16 + 3 \neq 0$; tentons donc $P'(3) = 108 - 135 + 24 + 3 = 0$. Ah, nouvelle chance : $P(3) = 81 - 135 + 36 + 9 + 9 = 0$. On a trouvé notre racine double, on peut donc factoriser sous la forme $P = (X-3)^2 Q$, effectuons une petite division euclidienne pour trouver Q :

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & X^4 & - & 5X^3 & + & 4X^2 & + & 3X & + & 9 & X^2 - 6X + 9 \\ \cline{11-11}
- & (X^4 & - & 6X^3 & + & 9X^2) & & & & & X^2 + X + 1 \\
 & & & X^3 & - & 5X^2 & + & 3X & + & 9 & \\
 & & - & (X^3 & - & 6X^2 & + & 9X) & & & \\
 & & & & & X^2 & - & 6X & + & 9 & \\
 & & & & - & (X^2 & - & 6X & + & 9) & \\
 & & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

On en déduit que $P = (X-3)^2(X^2+X+1)$. On ne peut pas faire mieux dans $\mathbb{R}[X]$ puisque le dernier facteur a un discriminant négatif. Dans $\mathbb{C}[X]$, $P = (X-3)^2\left(X + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
3. La méthode normale est ici de poser $Y = X^4$ pour obtenir $Y^2 + Y + 1$. On commence à savoir que ce trinôme a pour racines $Y_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $Y_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Il ne reste plus qu'à trouver les racines quatrièmes de ces deux nombres pour avoir les huit racines de P. Ouf, c'est assez facile, pour Y_1 on trouve $e^{i\frac{2\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$; $e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $e^{i(\frac{\pi}{6}+\pi)} = -e^{i\frac{\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ et $-e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les racines quatrièmes de Y_2 sont simplement les conjugués des précédentes, à savoir $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$; $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ et $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Conclusion : $P = \left(X - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$

$\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$. Dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les racines conjuguées pour obtenir $P = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$.
Mais les plus astucieux auront naturellement évité tous ces affreux calculs en recourant à l'ignoble astuce suivante : $P(X) = X^8 + X^4 + 1 = (X^8 + 2X^4 + 1) - X^4 = (X^4 + 1)^2 - (X^2)^2$. On reconnait maintenant une différence de deux carrés, qu'on sait factoriser : $P(X) = (X^4 + X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1)$. Chacun des deux facteurs peut à nouveau se factoriser en utilisant la même technique : $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$; et $X^4 - X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - 3X^2 = (X^2 + 1)^2 - (\sqrt{3}X)^2 = (X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)$. Finalement, on obtient la factorisation suivante pour P : $P(X) = (X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)$ (et on constate que chacun des quatre facteurs a un discriminant négatif, on ne peut donc pas aller plus loin dans $\mathbb{R}[X]$).

4. Méthode normale : on pose $Y = X^3$, on cherche à factoriser $Y^3 + Y^2 + Y + 1$. Il y a -1 qui est racine évidente, on peut factoriser sous la forme $(Y+1)(Y^2+1)$ (la factorisation étant ici triviale, inutile de détailler le calcul). Il ne reste donc plus qu'à trouver les racines cubiques de -1, i et $-i$. Les racines cubiques de -1 sont -1 ; $-e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; et $-e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les racines cubiques de $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ sont $e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$; $e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$; et $e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$. Les racines cubiques de $-i$ sont les opposées de celles de i, à savoir $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ et enfin i. On trouve donc la factorisation $X^9 + X^6 + X^3 + 1 = (X + 1)(X + i)(X - i)\left(X - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$.
Dans $\mathbb{R}[X]$, on peut factoriser sous la forme $X^9 + X^6 + X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$.

5. Ici, difficile de s'en sortir sans astuce, il n'y a même pas l'ombre d'une racine évidente. Il faut en fait constater que $(X + 1)P(X) = X^7 - X^6 + \cdots + X + X^6 - X^5 + \cdots + 1 = X^7 + 1$. Voilà un polynôme qu'on sait factoriser, ses racines sont les racines septièmes de -1, qui sont les opposés des racines septièmes de l'unité (qu'on ne cherchera pas à exprimer autrement que sous forme exponentielle, il ne s'agit pas de valeurs remarquables), donc $(X+1)P(X) = (X + 1)(X + e^{i\frac{2\pi}{7}})(X + e^{i\frac{4\pi}{7}})(X + e^{i\frac{6\pi}{7}})(X + e^{i\frac{8\pi}{7}})(X + e^{i\frac{10\pi}{7}})(X + e^{i\frac{12\pi}{7}})$, dont on déduit évidemment que $P = (X + e^{i\frac{2\pi}{7}})(X + e^{i\frac{4\pi}{7}})(X + e^{i\frac{6\pi}{7}})(X + e^{i\frac{8\pi}{7}})(X + e^{i\frac{10\pi}{7}})(X + e^{i\frac{12\pi}{7}})$. Dans $\mathbb{R}[X]$, on aura $P(X) = \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) + 1\right)$.

Exercice 4 (**)

1. Posons donc $z = a + ib$ et tentons de trouver $z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$. On doit donc avoir $a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $2ab = \frac{1}{2}$, et en passant par le module $a^2 + b^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$. En additionnant les deux équations extrêmes, on trouve $2a^2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$, soit $a = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}$. De même en soustrayant, et en utilisant le fait que a et b sont de même signe, on obtient $b = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$. Les deux racines carrées de $\frac{i + \sqrt{3}}{2}$ sont donc $\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$.
Le calcul des racines carrées de $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ est extrêmement similaire puisqu'on échange en

fait les équation concernant a et b (le module est inchange) pour obtenir les deux valeurs $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}-i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$.

2.
$$\begin{array}{cccccc|c}
 & X^6 & & & & -\ i & X^2+i \\ \cline{7-7}
- & (X^6 & + & iX^4) & & & X^4-iX^2-1 \\
 & & & -iX^4 & & -\ i & \\
 & & - & (-iX^4 & +\ X^2) & & \\
 & & & & -X^2 & -\ i & \\
 & & & - & (-X^2 & -\ i) & \\
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

On peut donc écrire $X^6-i=(X^2+i)(X^4-iX^2-1)$. Le premier facteur a pour racines $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ et $\frac{i-1}{\sqrt{2}}$ qui sont les racines carrées de $-i$ (on les trouve facilement en passant par la forme exponentielle si besoin), en posant $Y=X^2$ dans le deuxième facteur, on trouve pour discriminant $\Delta=-1+4=3$, donc les solutions sont $Y_1=\frac{i+\sqrt{3}}{2}$ et $Y_2=\frac{i-\sqrt{3}}{2}$. Quelle surprise, ce sont les deux nombres dont on a calculé les racines carrées à la première question. Finalement, on obtient la sublimissime expression :

$$X^6-i=\left(X-\frac{1}{2}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(X+\frac{1}{2}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(X-\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}-i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)$$
$$\left(X-\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)\left(X-\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}-i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\right)\left(X-\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\right)$$

3. C'est évident nettement plus simple : $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$, donc les solutions sont de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{3}$, donc sont égales à $e^{i\frac{\pi}{12}}$; $e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3})}=e^{i\frac{5\pi}{12}}$; $e^{i\frac{9\pi}{12}}=e^{i\frac{3\pi}{4}}$; $e^{i\frac{13\pi}{12}}$; $e^{i\frac{17\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{7\pi}{4}}$. Les racines carrées de $-i$ sont celles correspondant aux arguments multiples de $\frac{\pi}{4}$. Parmi les quatre qui restent, deux ont une partie réelle et une partie imaginaire positives, ce sont $e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{5\pi}{12}}$, celle qui correspond à $\frac{\pi}{12}$ est celle ayant la plus grande partie réelle. On en déduit que $e^{i\frac{\pi}{12}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$. En particulier, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$

Exercice 5 (**)

- Pour éviter des identifications un peu lourdes, utilisons le fait que 1 est racine double du polynôme P, et 0 racine simple. Comme P est de degré 3, on peut l'écrire sous la forme $P=aX(X-1)^2$. On a donc $P'=a(X-1)^2+2aX(X-1)$, d'où $P'(0)=a$. Il faut donc prendre $a=2$ pour satisfaire la condition $P'(0)=2$, et la seule solution est alors $P=2X(X-1)^2$. Si on tient absolument à procéder par identifications, on écrit $P=aX^3+bX^2+cX+d$, d'où $P'=3aX^2+2bX+c$. les quatre conditions de l'énoncé se traduisent alors par $d=0$; $a+b+c+d=0$; $3a+2b+c=0$ et $c=2$. On a donc $a+b=-2$ et $3a+2b=-2$. Par substition, $b=-2-a$, donc $3a-4-2a=-2$, soit $a=2$ puis $b=-4$. On trouve donc $P=2X^3-4X^2+2X=2X(X-1)^2$.
- Le plus simple ici est de travailler sur les racines possibles du polynôme P. Si a est racine de P, alors $(a+3)P(a)=aP(a+1)=0$, et $P(a+1)$ est également racine de P, sauf si $a=0$. En itérant le procédé, $a+2$ sera aussi racine sauf si $a+1=0$, puis $a+3$ sera racine etc. Finalement, tous les nombres de la forme $a+k$ seront racines du polynôme pour $k\in\mathbb{N}$, sauf s'il existe un entier naturel k tel que $a+k=0$, c'est-à-dire $a=-k$. Comme un polynôme autre que le polynôme nul (qui est une solution triviale du problème que nous allons désormais écarter) ne peut pas avoir une infinité de racines, les seules racines possibles de P sont les entiers négatifs.

Or, on peut aussi faire le raisonnement dans l'autre sens : si a est racine alors en posant $X = a-1$ dans l'égalité de départ, $(a-1)P(a) = (a+2)P(a-1)$, et $a-1$ est racine de P sauf si $a+2 = 0$. Comme précédemment, on obtiendra une infinité de racines sauf si $a+2-k = 0$ pour un entier naturel k, c'est-à-dire $a = k-2$. En comparant avec la première condition obtenue, les seules racines possibles de P sont 0, -1 et -2. Autrement dit, $P = \lambda X^\alpha (X+1)^\beta (X+2)^\gamma$ (rien n'interdit a priori d'avoir des racines multiples). Réinjectons cette formule dans l'équation de départ : $\lambda(X+3)X^\alpha(X+1)^\beta(X+2)^\gamma = \lambda X(X+1)^\alpha(X+2)^\beta(X+3)^\gamma$. Par unicité de la factorisation d'un polynôme en produit de polynômes irréductibles, on doit avoir $\alpha = 1$; $\beta = \alpha$; $\gamma = \beta$ et $1 = \gamma$, donc les polynômes solutions sont de la forme $P(X) = \lambda X(X+1)(X+2)$.

- Il est encore une fois ici plus simple de travailler avec le polynôme dérivée : on sait que -1 est racine double de $P+1$ et 1 est racine double de $P-1$, donc -1 et 1 sont racines de P' (les constantes disparaissent en dérivant). Comme P est de degré 3, P' est de degré 2 et s'écrit donc nécessairement $P' = \alpha(X+1)(X-1) = \alpha(X^2-1)$. Par conséquent, $P = \frac{\alpha}{3}X^3 - \alpha X + \beta$. Reste à trouver α et β tels que -1 soit racine de $P+1$, c'est-à-dire $P(-1) = -1$; et 1 soit racine de $P-1$, soit $P(1) = 1$. On obtient les conditions $-\frac{\alpha}{3}+\alpha+\beta = -1$, et $\frac{\alpha}{3}-\alpha+\beta = 1$. En additionnant les deux équations, on trouve $\beta = 0$, puis $\frac{2}{3}\alpha = -1$, soit $\alpha = -\frac{3}{2}$. Finalement, l'unique polynôme solution est $P = -\frac{1}{2}X^3 + \frac{3}{2}X$.
- Une bonne tactique ici est d'essayer de commencer par obtenir une information sur le degré du polynôme P en étudiant le coefficient dominant de chacun des deux membres de l'égalité. Si P a pour terme dominant a_nX^n, alors le membre de droite a pour terme dominant a_nX^n, et X'' a lui-même pour terme dominant $n(n-1)a_nX^{n-2}$. En multipliant par X^2+4, on retombe sur du $n(n-1)a_nX^n$ (le $+4$ ne va pas influencer le terme dominant), donc on obtient la condition nécessaire $n(n-1) = 6$, soit $n^2-n-6 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 1+24 = 25$ et admet deux solutions $n_1 = \frac{1+5}{2} = 3$ et $n_2 = \frac{1-5}{2} = -2$. Le degré d'un polynôme étant difficilement négatif, les solutions seront forcément de degré 3 (il faudra tout de même y ajouter la solution triviale constituée par le polynôme nul). Posons donc $P = aX^3+bX^2+cX+d$, alors $P'' = 6aX+2b$, et $(X^2+4)P'' = 6aX^3+2bX^2+24aX+8b$. Par identification avec $6P$, on obtient les conditions $6a = 6a$ (toujours vérifiée), $2b = 6b$ qui implique $b = 0$; $24a = 6c$ qui donne $c = 4a$ et enfin $8b = 6d$ qui donne $d = 0$ puisque $b = 0$. Conclusion : les seuls polynômes solutions sont ceux de la forme $P = aX^3+4aX = aX(X^2+4)$.
- Plusieurs pistes possibles ici, mais le plus simple est sûrement de raisonner sur le degré : $d°(P(X^2)) = 2d°(P)$ et $d°((X^2+1)P) = 2+d°(P)$. en oubliant la solution nulle, on doit donc avoir $2d°(P) = d°(P)+2$, soit $d°(P) = 2$. Posons donc $P = aX^2+bX+c$, alors $P(X^2) = aX^4+bX^2+c$ et $(X^2+1)P(X) = aX^4+bX^3+(c+a)X^2+bX+c$. Par identification, on trouve les conditions $a = a$ et $c = c$, $b = 0$ (deux fois) et $b = a+c$. On doit donc avoir $c = -a$, et les solutions sont les polynômes de la forme $P = aX^2-a = a(X^2-1)$.

Exercice 6 (**)

1.

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l} & X^3 & + & X^2 & - & 2X & + & 3 & & X^2+2X-1 \\ \cline{10-10} - & (X^3 & + & 2X^2 & - & X) & & & & X-1 \\ & & - & X^2 & - & X & + & 3 & & \\ & & - & (-X^2 & - & 2X & + & 1) & & \\ & & & & & X & + & 2 & & \end{array}$$

Conclusion : $X^3+X^2-2X+3 = (X^2+2X-1)(X-1)+X+2$.

2.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & 2X^4 & - & 3X^3 & + & 4X^2 & - & 5X & + & 6 & X^2-3X+1 \\ \cline{11-11}
- & (2X^4 & - & 6X^3 & + & 2X^2) & & & & & 2X^2+3X+11 \\
 & & & 3X^3 & + & 2X^2 & - & 5X & + & 6 & \\
 & & - & (3X^3 & - & 9X^2 & + & 3X) & & & \\
 & & & & & 11X^2 & - & 8X & + & 6 & \\
 & & & & - & (11X^2 & - & 33X & + & 11) & \\
 & & & & & & & 25X & - & 5 &
\end{array}
$$

Conclusion : $2X^4-3X^3+4X^2-5X+6=(X^2-3X+1)(2X^2+3X+11)+25X-5$.

3.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & X^4 & & & - & 2\cos(2\theta)X^2 & & & + & 1 & X^2-2\cos(\theta)X+1 \\ \cline{11-11}
- & (X^4 & - & 2\cos(\theta)X^3 & + & X^2) & & & & & X^2+2\cos(\theta)X+1 \\
 & & & 2\cos(\theta)X^3 & - & (4\cos^2(\theta)-2+1)X^2 & & & + & 1 & \\
 & & - & (2\cos(\theta)X^3 & - & 4\cos^2(\theta)X^2 & + & 2\cos(\theta)X) & & & \\
 & & & & & X^2 & - & 2(\cos(\theta))X & + & 1 & \\
 & & & & - & (X^2 & - & 2\cos(\theta)X & + & 1 & \\
 & & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Le résultat est assez sympathique : $X^4-2\cos(2\theta)X+1=(X^2-2\cos(\theta)X+1)(X^2+2\cos(\theta)X+1)$.

4.

$$
\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & X^3 & - & iX^2 & - & X & & & X-1+i \\ \cline{9-9}
- & (X^3 & + & (i-1)X^2) & & & & & X^2+(1-2i)X-2-3i \\
 & & & (1-2i)X^2 & - & X & & & \\
 & & - & ((1-2i)X^2 & + & (1+3i)X) & & & \\
 & & & & & (-2-3i)X & & & \\
 & & & & - & ((-2-3i)X & + & 5+i) & \\
 & & & & & & & -5-i &
\end{array}
$$

Conclusion : $X^3-iX^2-X=(X-1+i)(X^2+(1-2i)X-2-3i)-5-i$.

5. Il est évidemment hors de question ici de poser la division euclidienne explicitement. En fait, l'énoncé n'aurait du demander que le reste de cette division, car le quotient est en gros impossible à calculer. Écrivons quand même la division de façon théorique : $P=AQ+R$, avec $d^\circ(R)\leqslant 1$, soit $R(X)=\alpha X+\beta$. Comme tout ce qui nous intéresse est de connaitre R, une astuce classique est de prendre comme valeurs particulières de X dans l'égalité précédente les racines du polynôme Q (ce qui fera disparaitre le terme en AQ et notamment ce A bien gênant dont on ne sait rien. Ici, on peut donc écrire $P(i)=A(i)Q(i)+\alpha i+\beta$. Comme $Q(i)=0$ et $P(i)=(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n=e^{in\theta}$, on obtient la première condition $e^{in\theta}=\alpha i+\beta$. De même, avec $X=-i$, on trouve $e^{-in\theta}=-\alpha i+\beta$. En additionnant les deux équations, $2\beta=e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos(n\theta)$, donc $\beta=\cos(n\theta)$. On en déduit que $i\alpha=e^{in\theta}-\cos(n\theta)=i\sin(n\theta)$, donc $\alpha=\sin(n\theta)$. Finalement, $(X\cos(\theta)+\sin(\theta))^n=(X^2+1)A(X)+\sin(n\theta)X+\cos(n\theta)$.

Exercice 7 (***)

1. Jusque-là tout va bien : $P_2=XP_1-P_0=X^2-2$; $P_3=X(X^2-2)-X=X^3-3X$; et $P_4=X(X^3-3X)-(X^2-2)=X^4-4X^2+2$.
2. On conjecture aisément que P_n est de degré n et de coefficient dominant 1, c'est-à-dire que $P_n=X^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k$. Prouvons-le par récurrence double. C'est vrai pour P_1 et P_2, supposons-le

vrai aux rangs n et $n+1$ alors $P_{n+2} = X(X^{n+1}+\sum_{k=0}^{n} a_k X^k - X^n - \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k = X^{n+2} + \sum_{k=0}^{n+1} c_k X^k$ (peu importe les coefficients exacts dans ce qui n'est pas dominant). La propriété reste donc vraie au rang $n+2$, par principe de récurrence, elle est vrai pour tout entier $n \geqslant 1$.

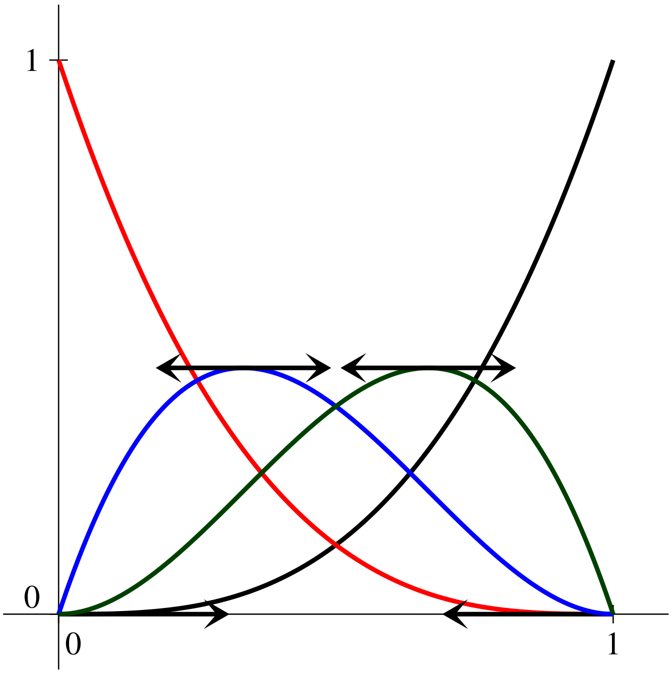
3. On va encore faire une récurrence double : $P_0\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = 2$ et $z^0 + \dfrac{1}{z^0} = 1+1 = 2$, donc ça marche pour P_0. De plus, $P_1\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = z+\dfrac{1}{z}$, ce qui prouve la propriété au rang 2. Supposons-la vérifiée aux rangs n et $n+1$, alors $P_{n+2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = \left(z+\dfrac{1}{z}\right) P_{n+1}\left(z+\dfrac{1}{z}\right) - P_n\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = \left(z+\dfrac{1}{z}\right)\left(z^{n+1}+\dfrac{1}{z^{n+1}}\right) - z^n - \dfrac{1}{z^n} = z^{n+2} + \dfrac{1}{z^n} + z^n + \dfrac{1}{z^{n+2}} - z^n - \dfrac{1}{z^n} = z^{n+2} + \dfrac{1}{z^{n+2}}$. La propriété est donc vérifiée au rang $n+2$ et la récurrence fonctionne.
4. En posant $z = e^{i\theta}$, on aura $z + \dfrac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$ donc, d'après la question précédente, $P_n(2\cos(\theta)) = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta)$.
5. D'après la question précédente, si $\cos(n\theta) = 0$, alors $2\cos(\theta)$ est une racine de P_n. Or, $\cos(n\theta) = 0$ équivaut à $\theta \equiv \dfrac{\pi}{2n}\left[\dfrac{\pi}{n}\right]$. Tous les réels de la forme $2\cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + k\dfrac{\pi}{n}\right)$ sont donc racines du polynôme P_n. Or, il y a exactement n réels distincts dans cette liste, à savoir $2\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\dfrac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in \{0;1;\dots;n-1\}$ (ces valeurs sont bien distinctes car étant les cosinus d'angles distincts de l'intervalle $[0;\pi[$ sur lequel le cosinus est bijectif ; par contre, pour les valeurs plus grandes de k, on retrouve les même cosinus : $\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}+k\dfrac{\pi}{n}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + (2n-k-1)\dfrac{\pi}{n}\right)$ si $k \geqslant n$. Le polynôme P_n étant de degré n, il ne peut avoir plus de n racines, et on vient donc de les exhiber toutes. Conclusion : $P_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)\right)$. Par exemple, pour $n=3$, $P_3 = \left(X - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)\left(X - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)\left(X - 2\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right) = X(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3}) = X^3 - 3X$, on retrouve bien la bonne formule.

Exercice 8 (***)

Soit P le polynôme unitaire de degré 3 dont les racines complexes sont x, y et z. Autrement dit, $P = (X-x)(X-y)(X-z)$. Si on écrit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$, en connaissant par coeur ses relations coefficients-racines ou en développant comme un gros bourrin, on trouve $a = -x-y-z$, donc $a = -1$; $b = xy+yz+xz$. Ah mince, on ne connait pas cette valeur, rusons un peu en calculant $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz = 1+2b$, donc $1+2b = 1$ et $b = 0$. Enfin, la dernière relation donne $-xyz = c$. Or, $(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3y^2x+3y^2z+3z^2x+3z^2y+6xyz$ (ceux pour qui la formule ne semble pas claire développeront brutalement pour vérifier) soit $1 = -5 + 3(x+y+z)(xy+yz+zx) - 3xyz$, donc, en utilisant que $b = 0$, $1 = -5+3c$ et $c = 2$. Finalement, $P = X^3 - X^2 + 2$. Coup de chance (ou plutôt, pour une fois, énoncé bien conçu), ce polynôme de degré 3 a une racine évidente, en l'occurence -1. On peut donc factoriser sous la forme $P = (X+1)(dX^2+eX+f) = dX^3 + (d+e)X^2 + (e+f)X + f$. Par identification, $d = 1$; $d+e = -1$ donc $e = -2$ et $e+f = 0$ soit $f = 2$. Comme $P = (X+1)(X^2-2X+2)$, et que la deuxième parenthèse a pour discriminant $\Delta = 4-8 = -4$, et donc pour racines $z_1 = \dfrac{2+2i}{2} = 1+i$ et $z_2 = 1-i$, on peut factoriser P sous la forme $P = (X+1)(X-1-i)(X-1+i)$. À permutation près, on connait les valeurs de x, y et z. Le système initial a six solutions : $\mathcal{S} = \{(-1,1-i,1+i);(-1,1+i,1-i);(1-i,-1,1+i);(1-i,1+i,-1);(1+i,-1,1-i);(1+i,1-i,-1)\}$.

Exercice 9 (***)

1. Il suffit de recopier la définition : $B_{3,0} = \binom{3}{0} X^0(1-X)^{3-0} = (1-X)^3 = 1-3X+3X^2-X^3$; $B_{3,1} = \binom{3}{1} X^1(1-X)^2 = 3X(1-X)^2 = 3X-6X^2+3X^3$; $B_{3,2} = 3X^2(1-X) = 3X^2-3X^3$ et $B_{3,3} = X^3$.
2. Le polynôme $B_{3,0}$ est décroissant sur $[0;1]$ (et même sur $\mathbb{R}$!), sa dérivée s'annulant accessoirement en 1, et il vaut 1 en 0 et 0 en 1. Au contraire, le polynôme $B_{3,3}$ est croissant, de dérivée nulle en 0, s'annule en 0 et vaut 1 en 1. Ensuite, $B'_{3,1} = 3-12X+9X^2 = 3(1-4X+3X^2)$. La parenthèse a pour racine évidente 1, et s'annule également en $\frac{1}{3}$ pusique le produit des racines doit être égal à $\frac{1}{3}$. La fonction $B_{3,1}$ est croissante sur $\left[0;\frac{1}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{2}{3};1\right]$, avec pour maximum $3\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. Inutile de refaire les calculs pour le dernier polynôme : $B_{3,2}(x) = B_{3,1}(1-x)$, donc sa dérivée s'annule en 0 et en $\frac{2}{3}$, avec un maximum $\frac{4}{9}$ également. Ce qui donne les courbes suivantes ($B_{3,0}$ en rouge, $B_{3,1}$ en bleu, $B_{3,2}$ en vert et $B_{3,3}$ en noir) :



3. Calculons $B_{3,0}+B_{3,1}+B_{3,2}+B_{3,3} = 1-3X+3X^2-X^3+3X-6X^2+3X^3+3X^3-3X^3+X^3 = 1$. En fait, cette façon de faire le calcul est débile, on a en général $\sum_{k=0}^{n} B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k} = (X+1-X)^n = 1$ en utilisant la formule du binôme de Newton (qui est certainement valable sur l'anneau commutatif $\mathbb{K}[X]$). Comme tous les polynômes $B_{n;k}$ prennent des valeurs positives sur $[0,1]$ (puisque x et $1-x$ sont positifs sur cet intervalle), on aura toujours $0 \leqslant B_{n,k} \leqslant 1$ sur $[0,1]$.
4. Calculons de façon formelle : $B'_{n,k} = k\binom{n}{k} X^{k-1}(1-X)^{n-k} + (n-k)\binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k-1}$. Dans la première moitié, on peut utiliser la formule $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ pour obtenir $n\binom{n-1}{k-1} X^{k-1}$

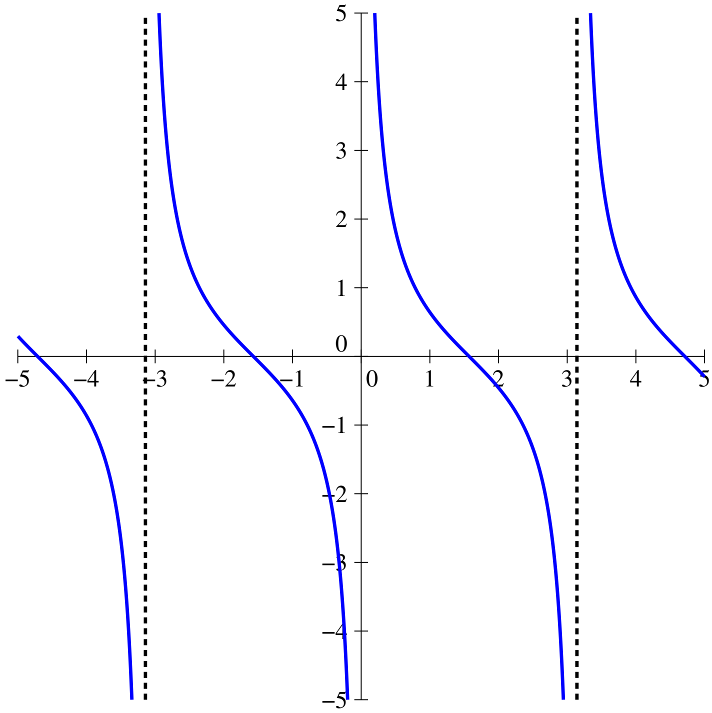
$(1-X)^{n-1-(k-1)} = nB_{n-1,k-1}$. Dans la deuxième moitié, on constate que $(n-k)\binom{n}{k} = \dfrac{(n-k)n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{k!(n-1-k)!} = n\binom{n-1}{k}$ et on fait pareil pour trouver $n\binom{n-1}{k}X^k(1-X)^{n-1-k} = nB_{n-1,k}$. Finalement, $B'_{n,k} = n(B_{n-1,k-1} - B_{n-1,k})$.

5. On a donc $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k+1}(1-x)^{n-1-k} = x\sum k = 0^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k} = x(x+1-x)^{n-1} = x$. Cette expression a certainement pour limite x quand n tend vers $+\infty$!

6. Pour calculer la somme, il est pratique d'écrire le $\dfrac{k^2}{n^2}$ sous la forme $\dfrac{k(k-1)}{n^2} + \dfrac{k}{n^2}$, ce qui donne $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)}{n^2}\binom{n-2}{k-2}x^k(1-x)^{n-k} + \frac{x}{n}$ en reprenant le calcul de la question précédente pour la deuxième moitié. On continue le calcul : $f_n(x) = \dfrac{n-1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}x^{k+2}(1-x)^{n-2-k} + \frac{x}{n} = \frac{n-1}{n}x^2(x+1-x)^{n-2} + \frac{x}{n} = \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{x}{n}$. cette expression converge bien vers x^2. On peut en fait démontrer (mais c'est nettement plus compliqué !) que, pour toute fonction f continue sur $[0;1]$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$.

Problème (***)

1. La fonction est définie si $\sin(x) \neq= 0$, donc sur $\mathbb{R}\backslash\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chacun de ses intervalles de définition, π-périodique (comme dans le cas de la tangente, numérateur et dénominateur changent tous les deux de signe si on ajoute π à la variable), et impaire. Sa dérivée est donnée par $\text{cotan}'(x) = \dfrac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$, qui est toujours négatif. La fonction cotan est donc strictement décroissante sur $]0,\pi[$. Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \text{cotan}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pi^-} \text{cotan}(x) = -\infty$ (le sinus est négatif mais le cosinus positif à cet endroit), la fonction est bien bijective de $]0,\pi[$ vers $\mathbb{R}$. Une allure de la courbe représentative sur quelques périodes :



2. (a) Attention, les termes de plus haut degré vont se simplifier lors de la soustraction : en appliquant la formule du binôme de Newton, $Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1 - (-1)^{n-k})$. Le terme en X^n s'annule donc mais celui en X^{n-1} est égal à $2\binom{n}{n-1} X^{n-1} = 2nX^{n-1}$. Le polynôme Q_n est donc de degré $n-1$ et de coefficient dominant $2n$.

   (b) Le polynôme Q_n s'annule lorsque $\left(\frac{X+1}{X-1}\right)^n = 1$ (il ne peut pas s'annuler pour $X = 1$ puisque $Q_n(1) = 2^n$). En exploitant nos connaissances sur les racines n-èmes complexes de l'unité, on a donc $\frac{X+1}{X-1} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, pour un certain entier $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$. On obtient alors $X + 1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}} X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, soit $X = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}$, en éliminant la valeur $k = 0$ pour laquelle le dénominateur s'annulerait. Un petit coup de factorisation par l'angle moitié (le facteur $e^{i\frac{\pi}{n}}$ se simplifie entre numérateur et dénominateur) permet alors de trouver $X = \frac{e^{i\frac{k\pi}{n}} + e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}}} = \frac{2\cos(\frac{k\pi}{n})}{2i\sin(\frac{k\pi}{n})} = -i \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, avec $k \in \{1, \dots, n-1\}$, exactement ce qui était demandé par l'énoncé.

   (c) Les valeurs $\frac{k\pi}{n}$ obtenues à la question précédente appartiennent toutes à l'intervalle $]0, \pi[$ et sont bien entendues distinctes, donc les valeurs de X également puisque la fonction cotan est bijective sur cet intervalle. Le polynôme étant de degré n, il admet donc n racines simples, et connaissant son coefficient dominant, on peut écrire sa factorisation : $Q_n = 2n \prod_{k=1}^{n-1} \left(X + i \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$.

3. (a) C'est du calcul bête et même pas vraiment méchant : $P_1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{3}{2k} X^k = 1 + 3X$, puis

$P_2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{5}{2k} X^k = 1+10X+5X^2$, et enfin $P_3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{7}{2k} X^k = 1+21X+35X^2+7X^3$. On peut bien entendu recourir au triangle de Pascal ou à la définition pour calculer les coefficients binômiaux les plus exotiques, par exemple $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35$.

(b) Comme on l'a déjà vu plus haut, on peut écrire $Q_{2n+1}(X) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^k(1 - (-1)^{2n+1-k})$. Toutes les valeurs impaires de k vont donner un coefficient nul, et pour les valeurs paires, la parenthèse vaudra simplement 2. En posant $k = 2j$, la variable j va prendre exactement toutes les valeurs entières entre 0 et n (et des valeurs demi-entières qu'on peut oublier puisque ce sont celles qui correspondent aux termes nuls de la somme initiale), ce qui permet d'écrire $Q_{2n+1}(X) = 2\sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{2j} X^{2j}$, ce qui est exactement égal à $2P_n(X^2)$.

(c) D'après la relation précédente, si a est racine de Q_{2n+1}, alors a^2 est racine de P_n. Les calculs de la question 2 assurent alors que les nombres $\left(-i \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2 = -\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ sont racines de P_n pour tous les entiers k compris entre 1 et $2n$. Cela fait beaucoup trop de racines pour un polynôme qui est manifestement de degré n, mais en fait ces valeurs sont deux à deux égales : de façon générale, $\operatorname{cotan}(\pi - x) = \frac{\cos(\pi - x)}{\sin(\pi - x)} = \frac{-\cos(x)}{\sin(x)} = -\operatorname{cotan}(x)$, ce qui donnera évidemment des valeurs identiques après passage au carré. Or, $\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1} = \pi - \frac{k\pi}{2n+1}$, donc les racines obtenues pour P_n seront les mêmes lorsque $k = 1$ et $k = 2n$; lorsque $k = 2$ et $k = 2n - 1$ et ainsi de suite. Il suffit donc de garder les valeurs de k comprises entre 1 et n pour obtenir n racines distinctes (là, les cotangentes sont toutes strictement positives et distinctes, donc leurs carrés aussi). Puisqu'on a obtenu n racines distinctes pour un polynôme de degré n, celui-ci admet nécessairement des racines simples.

(d) En notant a_k le coefficient de degra k du polynôme P_n, les relations coefficients-racines pour le polynôme P_n nous permettent d'affirmer que la somme de ces racines est égale à $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$. Ici, on calcule $a_n = \binom{2n+1}{2n} = 2n+1$, et $a_{n-1} = \binom{2n+1}{2n-2} = \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!3!} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6} = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$, ce qui donne bien $-\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{n(2n-1)}{3}$. On en déduit comme annoncé que $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2 = \frac{n(2n-1)}{3}$.

4. (a) On peut appliquer des méthodes très classiques d'études de fonctions : en posant $g(x) = \sin(x) - x$, on a $g'(x) = \cos(x) - 1$ qui est négative (sur $\mathbb{R}$ tout entier d'ailleurs), donc la fonction g est décroissante et vérifie $g(0) = 0$, elle est donc strictement négative sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. De même, si on pose $h(x) = \tan(x) - x$, on aura $h'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) > 0$, donc h est croissante et vérifie $h(0) = 0$, la fonction est positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

(b) Tous les termes de l'encadrement précédent sont positifs, on peut l'élever aucarré : $0 < \sin^2(x) \leqslant x^2 \leqslant \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$. On peut maintenant passer le tout à l'inverse en retournant le sens des inégalités : $\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2(x)}$. Le membre de gauche est égal à $\operatorname{cotan}^2(x)$, celui de droite peut s'écrire $\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = 1 + \operatorname{cotan}^2(x)$, d'où l'encadrement demandé.

(c) Remplaçons donc : $\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leqslant \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leqslant \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) + 1$, ce qu'on peut écrire $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left(\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)+1\right)$. On additionne tous ces encadrements pour k variant entre 1 et n (les valeurs des angles $\frac{k\pi}{2n+1}$ sont alors bien comprises dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et on utilise bien sûr le résultat de la question 3.*d* pour simplifier les sommes : $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \times \frac{n(2n-1)}{3} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \times \left(n + \frac{n(2n-1)}{3}\right)$. Les membres extrêmes sont des fractions rationnelles, on calcule leur limite quand n tend vers $+\infty$ en ne gardant que les termes de plus haut degré, ce qui donne dans les deux cas $\frac{\pi^2}{3} \times \frac{2n^2}{4n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (le n ajouté dans le membre de droite ne change pas la limite). D'après le théorème des gendarmes, on a donc bien $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5. (a) Allons-y pour une petite récurrence, puisqu'on nous le demande si gentiment. Lorsque $n = 1$, l'égalité se résume à $z_1^2 = z_1^2$, ce qui a l'air d'être vrai. Supposons-la vérifiée au rang n, alors $\left(\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right)^2 = \left(z_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} z_k\right)^2 = z_{n+1}^2 + 2z_{n+1}\sum_{k=1}^{n} z_k + \sum_{k=1}^{n} z_k^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_i z_j$, en appliquant l'hypothèse de récurrence pour « développer » le carré du deuxième terme. On peut ajouter le z_{n+1}^2 à la deuxième somme en faisant simplement monter l'indice jusqu'à $n+1$, mais on peut également ajouter les termes de la somme $2\sum_{k=1}^{n} z_k z_{n+1}$ à la dernière somme, ce qui revient exactement à faire augmenter l'indice j jusqu'à $n+1$ au lieu de n (puisqu'il ne manque que les doubles produits avec z_{n+1} pour pouvoir faire cela). On obtient alors exactement la formule au rang $n+1$.

(b) Posons donc $z_k = \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$, on sait déjà que $\sum_{k=1}^{n} z_k = \frac{n(2n-1)}{3}$. La formule démontrée à la question précédente donne alors $\sum_{k=1}^{n} z_k^2 = \frac{n^2(2n-1)^2}{9} - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_i z_j$. Cette dernière somme double est égale, d'après les relations coefficients-racines, à $\frac{a_{n-2}}{a_n}$ (avec les mêmes notations que précédemment). Or, $a_{n-2} = \frac{2n+1}{2n-4} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{5!}$ $= \frac{n(n-1)(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{30}$, donc $2\frac{a_{n-2}}{a_n} = \frac{n(n-1)(2n-1)(2n-3)}{15}$, dont on déduit que $\sum_{k=1}^{n} \cotan^4\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} z_k^2 = \frac{n^2(n-1)^2}{9} - \frac{n(n-1)(2n-1)(2n-3)}{15}$.

(c) On élève au carré l'encadrement de la question 4.*b* : $\frac{\pi^4}{(2n+1)^4}\cotan^4\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leqslant \frac{1}{k^4} \leqslant \frac{\pi^4}{(2n+1)^4}\left(1 + 2\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) + \cotan^4\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$. En additionnant ces encadrements et en exploitant la question précédente, la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4}$ est donc minorée par $\frac{\pi^4}{(2n+1)^4}\left(\frac{n^2(n-1)^2}{9} - \right.$ qui admet pour limite (on ne garde à nouveau que les termes de plus haut degré) $\frac{\pi^4}{16n^4}\left(\frac{4n^4}{9} - \frac{4n^4}{15}\right) =$

$\frac{\pi^4}{4}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{15}\right)=\frac{\pi^4}{90}$. De même, la somme est majorée par une expression encore plus dégueulasse, mais dont la limite est la même (aucun terme en n^4 n'apparait parmi les termes rajoutés par rapport au membre de gauche), ce qui permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

(d) Quoi, c'est déjà fini ? On n'est même pas assez courageux pour aller un peu plus loin et obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^6}$? Les plus curieux d'entre vous seront contents d'apprendre qu'elle vaut $\frac{\pi^6}{945}$.