Feuille d'exercices n° 5 : Équations différentielles

PTSI B Lycée Eiffel

5 novembre 2020

Vrai-Faux

1. Toute fonction dérivable sur un intervalle y admet des primitives.
2. L'équation $xy' + y = \cos(x)$ admet une unique solution y vérifiant $y(0) = 0$.
3. Les solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sont de la forme $Ke^{A(x)}$, où A est une primitive de a .
4. L'équation caractéristique de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ est $r^2 + ar + b = 0$.
5. Les solutions d'une équation du second ordre ayant un discriminant nul pour son équation caractéristique sont de la forme $(A + B)e^{rx}$.

Exercice 1 (* à **)

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes (aucun des calculs de cet exercice ne nécessite de technique spéciale sur les fractions rationnelles ou autres) :

- $f(x) = \frac{1}{(1-2x)^3}$
- $f(x) = \cos(x) \sin(x)$
- $f(x) = \arctan(x)$
- $f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$
- $f(x) = x \sin^3(x)$
- $f(x) = x\sqrt{1+2x^2}$
- $f(x) = \frac{1}{x+x \ln^2(x)}$
- $f(x) = \operatorname{ch}(x) \cos(x)$
- $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$
- $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$
- $f(x) = \ln(1+x^2)$
- $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

Exercice 2 (* à **)

Calculer les intégrales suivantes (aucun des calculs de cet exercice ne nécessite de technique spéciale sur les fractions rationnelles ou autres) :

- $\int_0^1 (x-2)(x+1)^5 dx$
- $\int_1^e x^2 (\ln x)^3 dx$
- $\int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2} dx$
- $\int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx$
- $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx$
- $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$
- $\int_0^{\ln(2)} \operatorname{ch}^2(x) \operatorname{sh}^2(x) dx$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$
- $\int_1^e x \ln^2(x) dx$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2(x) dx$
- $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$
- $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x} dx$
- $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx$
- $\int_1^e \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$
- $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x+1}} dx$

Exercice 3 (** à ***)

Calculer les intégrales et primitives suivantes (en appliquant les quelques recettes vues en cours sur les fractions rationnelles) :

1. $\int_2^3 \frac{1}{x(x+1)} dx$
2. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{(x^2+1)(x-2)} dx$
3. $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-4x+3} dx$
4. $\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2} dx$
5. $\int \arctan\left(\frac{x-1}{x-2}\right) dx$

Exercice 4 (***)

Calculer les intégrales suivantes (en mélangeant diverses techniques vues en cours) :

1. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t)} dt$ (on commencera par effectuer le changement de variables $u = \cos(t)$, puis on fera une décomposition en éléments simples)
2. $\int_0^1 x \arctan(x) dx$ (on commencera par une IPP)
3. $\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$ (on commencera par effectuer le changement de variables $t = \pi - x$)
4. $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln(t)) dt$ (on pourra effectuer deux IPP)
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 + \sin(x)} dx$ (on effectuera le changement de variables $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, il pourra être utile d'exprimer $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de t)

Exercice 5 (**)

On cherche à étudier la suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt$. On pourra utiliser dans tout l'exercice le résultat classique suivant : si $f(t) \leq g(t)$ pour tout réel $t \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

1. Calculer les premiers termes de la suite u_n (on s'arrête quand ça devient vraiment trop dur).
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n) .
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$, en déduire la limite de la suite (u_n) .
4. Montrer que $1 - u_n = \frac{\ln(2)}{n} - \int_0^1 \frac{\ln(1+t^n)}{n} dt$.
5. Montrer à l'aide d'une majoration de la fonction à l'intérieur de l'intégrale que $0 \leq \int_0^1 \ln(1+t^n) dt \leq \frac{1}{n+1}$.
6. En déduire la limite de $n(1 - u_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 6 (***)

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)} dx$.

1. Démontrer que, $\forall x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ (on pourra par exemple exploiter un calcul de dérivée).
2. On considère une fonction f définie et strictement monotone sur $[0, a]$, vérifiant $f(0) = 0$, et on note g sa réciproque.
 - (a) On veut prouver que, $\forall x \in [0, a]$, $\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} g(t) dt = xf(x)$. Faire un dessin clair expliquant ce résultat à l'aide de calculs d'aires.
 - (b) Exprimer $\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} g(t) dt$ à l'aide de primitives F et G des fonctions f et g .
 - (c) Redémontrer rigoureusement la formule souhaitée.
3. On veut calculer dans cette question $J = \int_0^1 \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$.
 - (a) Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que $x^4 + 1 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)P(x)$.
 - (b) Effectuer la décomposition en éléments simples de $\frac{x^2}{x^4 + 1}$, sous la forme $\frac{ax + b}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{cx + d}{P(x)}$.
 - (c) Calculer l'intégrale J , et mettre le résultat sous la forme la plus simple possible (en exploitant si besoin le résultat de la question 1).
4. Justifier que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$ est bijective de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ vers un intervalle à préciser, et donner l'expression de sa réciproque g .
5. Calculer $\int_0^1 g(x) dx$ et appliquer le résultat de la question 2 pour en déduire la valeur de I .

Exercice 7 (* à **)

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant à chaque fois le ou les intervalles de résolution choisis :

1. $y' - 2y = \operatorname{sh}(x) - 2x \operatorname{ch}(x)$.
2. $ty' + y = \cos(t)$.
3. $y' + y = \frac{1}{1 + e^t}$.
4. $y' + y = (x^2 - 2x + 2)e^{2x}$.
5. $xy' \ln x - y = 3x^2 \ln^2 x$.
6. $y' + 2y = x^2$.
7. $y' + x^2y + x^2 = 0$. Déterminer une solution vérifiant $y(0) = 0$.
8. $\sqrt{1 - x^2}y' - y = 1$.
9. $2ty' + y = t^n$ ($n \in \mathbb{N}$).
10. $y' + y = \sin(x) + \sin(2x)$.
11. $y' - 3y = x^2e^x + xe^{3x}$ en imposant de plus $y(0) = 1$.
12. $\operatorname{ch}(x)y' - \operatorname{sh}(x)y = \operatorname{sh}^3(x)$.

Exercice 8 (*)

On cherche les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x^2y' + xy = 1$. Commencer par résoudre cette équation sur chacun des intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. Conclure.

Exercice 9 (**)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin(x) + 2 \int_0^x e^{x-t} f(t) dt$.

Exercice 10 (**)

Résoudre l'équation différentielle $(1+t^2)y' = 4ty + 4t\sqrt{y}$ (on pourra poser $z = \sqrt{y}$ et chercher une équation différentielle plus ordinaire vérifiée par z). Cette équation différentielle est un cas particulier d'équation de Bernoulli.

Exercice 11 (**)

Déterminer les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant jamais et vérifiant $y' + 3y + y^2 = 0$ (on pourra poser $z = \frac{1}{y}$). Cette équation est un cas particulier d'équation de Riccati.

Exercice 12 (**)

Résoudre l'équation différentielle $(yy'' - (y')^2) \sin^2 x + y^2 = 0$ (on pourra poser $u = \frac{y'}{y}$).

Exercice 13 (*)

On considère l'équation différentielle $y' = y^2 + 1$, avec comme condition initiale $y(0) = 0$. Déterminer une valeur approchée de $y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler avec pas $h = \frac{1}{4}$, puis $h = \frac{1}{10}$. Comparez avec la valeur exacte (si, si, vous la connaissez). Qu'en pensez-vous ?

Exercice 14 (* à ***)

Résoudre les équations différentielles du deuxième ordre suivantes :

1. $y'' + 4y = x^2 - x + 1$.
2. $y'' + y' = 4x^2e^x$, avec $y(0) = e$ et $y'(0) = 0$.
3. $y'' + y' + 2y = (8x + 1)e^x$.
4. $y'' - y = \text{sh}(x)$.
5. $y'' - 3y' + 2y = (-3t^2 + 10t - 7)e^t$.
6. $y'' - 2y' + 5y = 4e^t \sin(2t)$.

Exercice 15 (**)

On considère l'équation $x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x^2}$, qu'on cherche à résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$. En posant $z(x) = y(e^x)$, déterminer une équation différentielle du second ordre à coefficients constants vérifiée par z . En déduire les solutions de l'équation initiale, et prouver qu'il en existe une seule vérifiant $y(1) = y'(1) = 0$. Ce type d'équation est appelé équation d'Euler.

Exercice 16 (**)

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4ty' + (11 + 4t^2)y = 0$ en posant $z(t) = e^{t^2}y(t)$.

Exercice 17 (***)

Résoudre les équations suivantes en effectuant le changement de variable proposé :

1. $4xy'' + 2y' - y = 0$ (on posera $t = \sqrt{x}$).
2. $(1 + x^2)^2y'' + 2x(1 + x^2)y' + 4y = 0$ (on posera $t = \arctan(x)$).
3. $x^2y'' + 3xy' + y = x^2$ (on posera $t = \ln(x)$ et on résoudra seulement sur $\mathbb{R}^{+*}$).

Exercice 18 (***)

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2f(-x) + x$.

Exercice 19 (***)

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) + f(x - y) = 2f(y)f(x)$ (utiliser une méthode proche de celle vue en cours pour la caractérisation des exponentielles, mais en dérivant deux fois).

Exercice 20 (***)

On cherche dans cet exercice toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2(2f'(x) + 1)$. On va pour cela raisonner par analyse et synthèse (c'est-à-dire qu'on va chercher à déterminer le plus de caractéristiques possibles des solutions du problème, de manière à leur donner une forme précise, et on vérifiera ensuite que les fonctions de cette forme sont effectivement solutions).

1. Soit donc f une telle fonction. Prouver que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Déterminer une équation linéaire du second ordre vérifiée par f .
3. En posant $g(t) = f(e^t)$, déterminer une équation linéaire du second ordre à coefficients constants dont g est solution.
4. Résoudre cette équation.
5. En déduire les solutions possibles de l'équation de départ.
6. Conclure.

Problème (***)

Le but de ce problème est d'étudier une équation du premier ordre non linéaire par une méthode originale : en prouvant que les réciproques des solutions sont elles-mêmes solutions d'une équation différentielle linéaire.

Première partie : Une étude de fonction.

On considère dans cette partie la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f .

- Étudier les variations de la fonction f , en déduire qu'elle est bijective de $\mathcal{D}_f$ vers un intervalle à préciser.
- Donner une expression simple de la réciproque g de la fonction f , ainsi que le tableau de variations de la fonction g .
- Calculer la dérivée seconde f'' de f , et calculer l'équation des tangentes éventuelles aux points d'annulation de f'' (on admettra qu'en ces points, la position relative de la tangente et de la courbe change au point d'intersection).
- Tracer soigneusement les allures des courbes représentatives de f et de g dans un même repère (en tenant notamment compte des calculs effectués à la question précédente).

Deuxième partie : Une équation différentielle linéaire.

On considère dans cette partie l'équation différentielle $(E) : 2x(1-x)y' + y = (1-x)\sqrt{\frac{x}{1+x}}$.

- Sur quels intervalles va-t-on résoudre l'équation (E) ?
- Déterminer deux constantes a et b telles que $\frac{1}{2x(1-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x}$, et en déduire les solutions de l'équation homogène associée à (E) .
- Déterminer une solution particulière de (E) à l'aide de la méthode de variation de la constante, et en déduire les solutions de l'équation complète. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?
- Déterminer l'unique solution définie sur $]0; 1[$ et vérifiant $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.
- Tracer une allure de cette solution, ainsi que de quelques autres solutions définies sur $]0, 1[$ (on ne demande pas une étude détaillée de toutes les fonctions, mais une explication rapide de l'allure des courbes), dans un même repère.

Troisième partie : Une équation non linéaire.

On va désormais s'intéresser à l'équation non linéaire $(F) : xy' + 2y(1-y) = 0$, qu'on cherche à résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- Déterminer les fonctions constantes solutions de l'équation (F) .
- Pour tout la suite, on cherchera à décrire les solutions de l'équation à valeurs dans $]0; 1[$. Montrer que ces solutions sont nécessairement décroissantes.
- En déduire qu'elles sont bijectives, et que leurs réciproques sont solutions de l'équation homogène associée à (E) .
- En déduire que les solutions cherchées sont de la forme $y(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{k}\right)^2}$, où k est une constante strictement positive. Quelles sont les valeurs de k convenables (pour lesquelles y est effectivement à valeurs dans $]0; 1[$) ?
- Montrer que, si on fixe une valeur de x_0 strictement positive, et un réel $\alpha \in]0; 1[$, il existe une unique solution parmi les précédentes vérifiant $y(x_0) = \alpha$.
- Tracer une allure soignée de la courbe de la solution vérifiant $y(2) = \frac{1}{2}$.