

Feuille d'exercices n° 15 : Analyse asymptotique

PTSI B Lycée Eiffel

26 mars 2021

Exercice 1 (*)

Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{n^2 + e^{-2n} + \sqrt{n^5}}{\ln(2n) + 2n - 3}$
2. $u_n = (n + 3 \ln(n))e^{-(n+1)}$
3. $u_n = \frac{\ln(n^2 + 1)}{n^2 + 1}$
4. $u_n = \ln\left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + 2}\right)$
5. $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$
6. $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} k!$
7. $u_n = \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$

Exercice 2 (**)

Soit (u_n) une suite décroissante vérifiant $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$. Montrer que la suite converge nécessairement vers 0 et en donner un équivalent simple. Le résultat reste-t-il vrai si la suite n'est pas supposée décroissante ?

Exercice 3 (***)

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{n-2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}$.

1. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.
2. Déterminer une relation simple entre u_{n+1} et u_n .
3. Prouver par récurrence que $u_n \leq n$ puis que $u_n = o(n)$.
4. Déterminer un équivalent simple de u_n .
5. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \sqrt{n}$.

Exercice 4 (** à ***)

Déterminer des équivalents des fonctions suivantes :

1. $\frac{\ln(1 + \tan(x))}{\sqrt{\sin(x)}}$ en 0
2. $\frac{\sqrt{x^3 + 1}}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ en $+\infty$
3. $\ln(\cos(x))$ en 0
4. $(x + 1)^x - x^x$ en 0
5. $\sqrt{\ln(x + 1) - \ln(x)}$ en $+\infty$
6. $\frac{1}{\cos(x)} - \tan(x)$ en $\frac{\pi}{2}$
7. $x^{x^{\frac{1}{x}}} - x$ en $+\infty$ et en 0
8. $\frac{\ln(x^2 + 1) - \ln(2x^2 + 1)}{\ln(x^3 + 1) - \ln(x^3 - 1)}$ partout où c'est intéressant

Exercice 5 (**)

On considère, pour tout entier naturel n , la fonction $f_n : x \mapsto x^3 + nx + n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède toujours une unique solution u_n sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $-1 \leq u_n \leq 0$.
3. Déterminer la monotonie de la suite (u_n) .
4. Prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.
5. Montrer que $u_n + 1 \sim \frac{1}{n}$, puis que $u_n = -1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
6. Comme vous avez du temps à perdre, continuez les calculs jusqu'à avoir un développement asymptotique à l'ordre $\frac{1}{n^5}$.

Exercice 6 (* à **)

Calculer les développements limités suivants (on utilisera la notation $DL_n(a)$ pour indiquer le développement limité à l'ordre n au point a) :

- $DL_4(0); f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$
- $DL_6(0); f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$
- $DL_4(1); f(x) = e^x$
- $DL_2(0); f(x) = \sqrt{3 + \cos(x)}$
- $DL_4(0); f(x) = \sqrt{\cos(x)}$
- $DL_5(0); f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$
- $DL_3(0); f(x) = \sqrt{x+2}$
- $DL_4(0); f(x) = \ln(1 + e^x)$
- $DL_6(0); f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$
- $DL_3(0); f(x) = \sqrt{\cos(x)} - \cos(\sqrt{x})$
- $DL_5(0); f(x) = e^{\sin(x)}$
- $DL_3(2); f(x) = x^4$
- $DL_4(0); f(x) = (1 + \sin(x))^x$
- $DL_2(1); f(x) = \arctan(x)$
- $DL_3(1); f(x) = \ln(\sqrt{x})$
- $DL_3(0); f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$
- $DL_3(0); f(x) = \ln(\cos(3x))$
- $DL_3\left(\frac{\pi}{3}\right); f(x) = \cos(x)$
- $DL_3(0); f(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}$
- $DL_2(0); f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$
- $DL_3(0); f(x) = \ln(2e^x + e^{-x})$
- $DL_2(0); f(x) = \frac{xe^{-x}}{2x+1}$
- $DL_2(2); f(x) = x^x$
- $DL_2(0); f(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$

Exercice 7 (***)

À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, déterminer un réel A tel que $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| (1+x^2)^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n} \ln(1+x^2) \right| \leq \frac{A}{n^2}$. En déduire deux réels a et b tels que $\int_0^1 (1+x^2)^{\frac{1}{n}} dx \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 8 (* à **)

Calculer à l'aide de développements limités les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \cos(x)}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} - x$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$

Exercice 9 (** à ***)

Étudier le comportement des fonctions suivantes (existence d'asymptote ou de tangente et position relative) à l'endroit indiqué :

1. $f(x) = \ln(1+x+x^2)$ au voisinage de 0.
2. $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ au voisinage de 0.
3. $f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$.
4. $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ en $+\infty$.
5. $f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$ en $+\infty$.
6. $f(x) = \frac{\arctan(x)}{\sin^3(x)} - \frac{1}{x^2}$ au voisinage de 0.
7. $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$ en $+\infty$ (on donnera un développement asymptotique avec trois termes).
8. $f(x) = \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1}$ sur $\mathbb{R}$.
9. $f(x) = x^{1-\frac{1}{x^2}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 (***)

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = n - \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{1}{k}\right)$ et $v_n = u_n + \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ sont adjacentes (au moins à partir d'un certain rang).

Exercice 11 (***)

On souhaite dans cet exercice étudier la fonction $f : x \mapsto (x^2 - 1) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$. On notera $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f .

- Déterminer rigoureusement l'ensemble de définition de la fonction f . Étudier la parité de f .
- Calculer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f(x)$. En déduire en particulier l'équation de la tangente en $\mathcal{C}$ à l'origine, ainsi que la position relative de $\mathcal{C}$ et de cette tangente au voisinage de 0.
- Étude locale au voisinage de $+\infty$.
 - Calculer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $(1 - X^2) \ln \left(1 + \frac{2X}{1 - X} \right)$.
 - En déduire un développement asymptotique de f à l'ordre $\frac{1}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
 - La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle une asymptote en $+\infty$? Si oui, préciser la position relative de $\mathcal{C}$ et de cette asymptote.
 - Que se passe-t-il en $-\infty$?
- La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 1? Si oui, étudier sa dérivabilité à cet endroit.
- Calculer la dérivée f' de la fonction f et l'exprimer en fonction de $g(x) = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \frac{1}{x}$.
On rappelle qu'une fonction de la forme $\ln |u|$ peut être immédiatement dérivée en $\frac{u'}{u}$ sans se préoccuper du signe de $u(x)$.
- Étudier les variations et le signe de g sur les intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$. On prouvera en particulier que g s'annule en une seule valeur α vérifiant $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$. En déduire le tableau de variations complet de f .
- Tracer une allure soignée de la courbe $\mathcal{C}$ (on donne $\alpha \simeq 0.65$ et $f(\alpha) \simeq -0.9$).

Exercice 12 (**)

On souhaite étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{(x^2 + 1) \arctan(x)}{x}$. On notera $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- Étudier la parité de la fonction f .
- Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x)$.
- En déduire que f est prolongeable par continuité et dérivable en 0. Donner l'équation de sa tangente en 0, et la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de cette tangente au voisinage de 0.
- Montrer que, $\forall x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
- Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$, donner son équation ainsi que sa position relative par rapport à $\mathcal{C}_f$. Que se passe-t-il en $-\infty$?
- On pose $h(x) = \arctan(x) + \frac{x}{x^2 - 1}$. Étudier les variations de la fonction h sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- En déduire les variations de f .
- Tracer une allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Problème (***)

On s'intéresse dans tout cet exercice à la fonction $g : x \mapsto e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1+x+x^2}$.

1. Étude de la fonction g .

- (a) Déterminer le domaine de définition de g .
- (b) Calculer la dérivée de g et prouver que $g'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2x^2 \sqrt{1+x+x^2}} (2x^3 - x^2 - 2x - 2)$.
- (c) Sans chercher à résoudre d'équation du troisième degré, montrer que g' s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$, en une valeur α vérifiant $1 < \alpha < 2$ (on pourra redériver un morceau de g').
- (d) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
- (e) La fonction g prolongée à gauche en 0 admet-elle une demi-tangente à gauche en 0 (si oui, déterminer sa pente) ?
- (f) Donner un équivalent simple de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- (g) Effectuer un développement asymptotique de g à l'ordre $\frac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$ (on commencera par sortir un facteur x de la racine carrée). En déduire la présence d'une asymptote oblique dont on donnera l'équation, ainsi que la position relative de la courbe de g et de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.
- (h) La même droite est-elle asymptote quand x tend vers $-\infty$? Sinon, que se passe-t-il de ce côté-là ?
- (i) Tracer une allure soignée de la courbe représentative de g . On donne $\alpha \simeq 1,55$ et $g(\alpha) \simeq 4,2$.

2. Un peu de suites implicites.

- (a) Justifier que, $\forall n \geq 5$, l'équation $g(x) = n$ admet deux solutions distinctes u_n et v_n sur $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant $u_n < \alpha$ et $v_n > \alpha$.
- (b) Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont monotones et prouver rigoureusement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- (c) En partant de l'équation $g(u_n) = n$, montrer que $\ln(n)u_n = 1 + \frac{u_n}{2} \ln(1 + u_n + u_n^2)$. En déduire un équivalent simple de u_n .
- (d) Montrer que $u_n = \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{2 \ln^3(n)} + o\left(\frac{1}{\ln^3(n)}\right)$ (attention à la rédaction!).
- (e) Utiliser l'expression précédente pour obtenir le terme suivant du développement asymptotique de la suite (u_n) .
- (f) Donner un équivalent simple de v_n quand n tend vers $+\infty$ (on oubliera pas que (v_n) tend elle-même vers $+\infty$, contrairement à (u_n)).
- (g) Montrer que $v_n = ne^{-\frac{1}{v_n}} \left(1 + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{v_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, et en déduire la limite de $v_n - n$ quand n tend vers $+\infty$.
- (h) Calculer un développement asymptotique de v_n sous la forme $v_n = n + a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.