Chapitre 7 : Dénombrement

PTSI B Lycée Eiffel

10 décembre 2020

Toute chose est nombre.

Pythagore.

Il y a trois sortes de mathématiciens :
ceux qui savent compter et ceux qui ne savent pas compter.

La combinatoire, science du dénombrement, sert comme son nom l'indique à compter. Il ne s'agit bien entendu pas de revenir au stade du CP et d'apprendre à compter sur ses doigts, mais bien de définir des objets et notations mathématiques permettant de compter le nombre d'éléments d'ensembles bien trop gros et compliqués pour être dénombrés à la main. Le dénombrement n'a pas en soi énormément d'intérêt, mais trouvera toute son utilité ensuite en probabilités : dans le cadre des probabilités finies, la probabilité d'un évènement se calcule en divisant le nombre de cas favorables par le nombre total de cas possibles, ce qui suppose qu'on sache calculer les nombres de cas en question.

Objectifs du chapitre :

- être capable d'analyser correctement un énoncé pour choisir le bon type d'outil de dénombrement, et mener un raisonnement combinatoire clair et rigoureux
- manipuler sans hésitation les coefficients binomiaux

Quelques exemples introductifs.

Avant de nous lancer à la découverte des outils mathématiques qui forment la base du dénombrement, citons quelques exemples concrets de calcul qui vont justement nécessiter ces outils pour pouvoir être effectués (relativement) facilement (alors que sans ces mêmes outils, ils sont essentiellement impossibles) :

- Un tirage de Loto consiste à tirer sept boules dans une urne en contenant 49 (numérotées de 1 à 49). Combien y a-t-il de tirages possibles ?
- Il y a 45 élèves dans la classe. Quelle est la probabilité qu'il y en ait (au moins) deux parmi eux qui soient nés le même jour de l'année ?
- On veut répartir les 45 élèves de la classe en 15 trinômes de colles. Combien y a-t-il de répartitions possibles (l'ordre des trinômes ainsi que l'ordre des élèves au sein de chaque trinôme n'étant pas important) ?

Les réponses à ces question seront données en fin de chapitre, une fois que nous aurons étudié les outils mathématiques qu'elles vont faire intervenir.

1 Cardinaux d'ensembles finis.

Définition 1. Un ensemble E est **fini** s'il est en bijection avec l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, pour un certain entier naturel n. Cet entier n est alors unique, il est appelé **cardinal** de l'ensemble E, et on le note $\mathrm{Card}(E)$, ou $|E|$, ou encore $\sharp E$.

Remarque 1. Cela correspond bien à la notion intuitive d'ensemble dont on peut compter les éléments. En effet, une bijection de E vers $\{1, \ldots, n\}$ est simplement une façon d'étiquetter les éléments de E avec les numéros 1, 2, …, n.

Proposition 1. Soit E un ensemble fini et F un sous-ensemble de E, alors F est un ensemble fini, et $|F| \leqslant |E|$, avec égalité si et seulement si $E = F$.

Démonstration. Cette propriété, comme souvent en ce qui concerne les ensembles finis, est assez évidente d'un point de vue intuitif, mais pas si simple à démontrer correctement. Nous nous en tiendrons au point de vue intuitif. □

Proposition 2. Soient E et F deux ensembles finis. Si E et F sont en bijection l'un avec l'autre, ils ont même cardinal.

Démonstration. Il existe par hypothèse une bijection f de E vers F. De plus, F étant fini, notons n son cardinal, il existe alors une bijection g de F dans $\{1, \ldots, n\}$. L'application $g \circ f : E \to \{1, \ldots, n\}$ est une composée d'applications bijectives, donc est bijective, ce qui prouve que E est de cardinal n. □

Proposition 3. Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble fini E. Alors $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Démonstration. Commençons par constater que dans le cas où les deux ensembles A et B sont disjoints, on a $|A \cup B| = |A| + |B|$. Vous voulez une démonstration ? Soit f une bijection de A dans $\{1, \ldots, n\}$ et g une bijection de B dans $\{1, \ldots, p\}$, n et p étant les cardinaux respectifs de A et de B. On peut alors construire une bijection h de $A \cup B$ vers $\{1, \ldots, n+p\}$ en posant $\forall x \in A$, $h(x) = f(x)$ et $\forall x \in B$, $h(x) = g(x)+p$ (intuitivement, celà revient à garder pour les éléments de A la numérotation donnée par l'application f, et à décaler pour les éléments de B la numérotation donnée par g, de façon à ne pas utiliser deux fois les mêmes numéros). Une fois ce fait admis, constatons que $A \cup B$ est l'union disjointe des trois ensembles $A \backslash B$, $B \backslash A$ et $A \cap B$. On a donc, en utilisant le résultat que nous venons de démontrer, $|A \cup B| = |A \backslash B| + |B \backslash A| + |A \cap B|$. Or, A étant union disjointe de $A \backslash B$ et de $A \cap B$, on a également $|A| = |A \backslash B| + |A \cap B|$, ou encore $|A \backslash B| = |A| - |A \cap B|$. De même, $|B \backslash A| = |B| - |A \cap B|$, donc on obtient $|A \cup B| = |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B|$, ce qui donne bien la formule annoncée. □

Théorème 1. Formule du crible de Poincaré.
Soient A_1, A_2, …, A_n des sous-ensembles finis d'un même ensemble E, alors

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|$$

.

Proposition 4. La formule de Poincaré étant assez peu lisible, voici ce que ça donne pour $n = 3$ et $n = 4$, qui sont de toute façon les seuls cas particuliers que vous devez retenir et savoir retrouver puisque la formule générale est hors-programme :

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|$

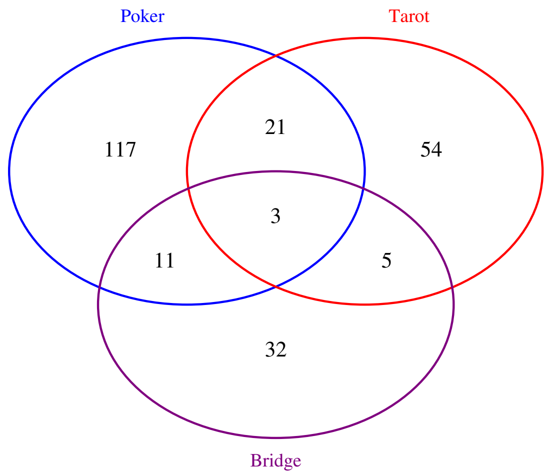
Démonstration. La preuve de la formule générale, assez technique, se fait par récurrence. On se contentera de prouver la formule pour $n = 3$ en partant de la proposition précédente : $|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |A \cap C| - |A \cap B| + |A \cap C \cap B \cap C|$, ce qui donne bien la formule annoncée. □

Exemple : Dans un lycée de 300 élèves, on dipose des informations suivantes :

- 152 élèves savent jouer au poker
- 83 élèves savent jouer au tarot
- 51 élèves savent jouer au bridge
- 24 savent jouer à la fois au poker et au tarot
- 14 savent jouer au poker et au bridge
- 8 savent jouer au tarot et au bridge
- enfin, 3 élèves maitrisent les trois jeux de cartes.

Le but de l'exercice est simplement de calculer le nombre d'élèves qui ne savent jouer à aucun des trois jeux de cartes. Si on veut être rigoureux, on note P (respectivement T et B) l'ensemble des élèves sachant jouer au poker (respectivement au tarot et au bridge), et on calcule à l'aide de la formule de Poincaré $|P \cup T \cup B| = |P| + |T| + |B| - |P \cap T| - |P \cap B| - |T \cap B| + |P \cap T \cap B| = 152 + 83 + 51 - 24 - 14 - 8 + 3 = 243$. Le nombre d'élèves sachant jouer à au moins l'un des trois jeux de cartes valant donc 243, ceux qui ne savent jouer à rien sont au nombre de $300 - 243 = 57$.

Une autre façon de résoudre le même problème est de tracer un diagramme de Venn (nom scientifique de la patate) représentant les trois ensembles, et d'indiquer les cardinaux des différentes intersections en partant du centre (on a besoin de quelques soustractions pour obtenir les autres valeurs) avant de tout additionner pour retrouver le cardinal de l'union des trois ensembles :



Proposition 5. Soit A un sous-ensemble fini d'un ensemble fini E, alors $|\bar{A}| = |E| - |A|$.

Démonstration. C'est une conséquence de la formule pour une union : E est union disjointe de A et de $\bar{A}$, donc $|E| = |A| + |\bar{A}|$. □

Proposition 6. Soient E et F deux ensembles finis, alors $E \times F$ est fini, et $|E \times F| = |E| \times |F|$.

Démonstration. Pas de preuve rigoureuse pour celui-ci, simplement une idée de la façon dont ça marche. Soit n le cardinal de E, et $e_1, e_2, \dots, e_n$ ses éléments, p le cardinal de F et $f_1, \dots, f_p$ ses éléments. on peut placer les éléments de $E \times F$ dans un tableau de la façon suivante :

	e_1	e_2	$\dots$	e_n
f_1	(e_1, f_1)	(e_2, f_1)	$\dots$	(e_n, f_1)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
f_p	(e_1, f_p)	(e_2, f_p)	$\dots$	(e_n, f_p)

Il y bien $n \times p$ éléments dans le tableau, donc dans $E \times F$. □

2 Listes, arrangements et combinaisons.

Définition 2. Soit E un ensemble fini de cardinal n, et $p \in \mathbb{N}$. Une **p-liste** d'éléments de E, ou p-uplet d'éléments de E, est simplement un élément de E^p.

Remarque 2. Dans une p-liste, les répétitions d'éléments sont possibles. Par ailleurs, l'ordre des éléments de la p-liste est important.

Proposition 7. Le nombre total de p-listes dans un ensemble de cardinal n vaut n^p.

Démonstration. C'est une conséquence de la formule de cardinal du produit vue un peu plus haut : comme $|E \times F| = |E| \times |F|$, on a $|E^p| = |E|^p$, ce qui prouve bien la propriété. $\square$

Exemple : Dans une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10, on tire quatre boules successivement avec remise. Le nombre de tirages possibles est de $10^4 = 10\ 000$ (il y a répétition possible à cause des remises, et l'ordre est important).

Définition 3. Soit E un ensemble à n éléments et $p \in \mathbb{N}$, on appelle **arrangement** de p éléments de E une p-liste d'éléments distincts de E.

Remarque 3. L'ordre des éléments est toujours important, par contre on ne peut plus avoir de répétition d'élément dans un arrangement.

> **Proposition 8.** Le nombre total d'arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments vaut $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Démonstration. Contentons-nous de l'idée intuitive : lorsqu'on construit un arrangement, on a n choix pour le premier élément, $n-1$ pour le deuxième, ..., $n-p+1$ pour le p-ième, soit au total $n(n-1) \times (n-p+1) = \dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)(n-p)\dots 2 \times 1}{n(n-1)\dots 2 \times 1} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. $\square$

Exemple : On reprend la même urne que précédemment, mais on tire les quatre boules successivement **sans** remise. Le nombre de tirages possibles est désormais de $\dfrac{10!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\ 040$.

Définition 4. Un arrangement de n éléments dans un ensemble à n éléments est aussi appelé **permutation** de cet ensemble. Il y a donc $n!$ permutations dans un ensemble à n éléments.

Remarque 4. Le nom de permutation vient du fait que choisir un arrangement de tous les éléments d'un ensemble revient tout simplement à définir un ordre sur les éléments de l'ensemble. Il y a donc $n!$ ordres possibles sur un ensemble à n éléments.

Exemple : Le nombre d'anagrammes d'un mot peut se calculer à l'aide de permutations. Il faut simplement diviser le nombre total du permutations du mot par $k!$ chaque fois qu'une même lettre apparait k fois dans le mot (ainsi, s'il y a trois E dans le mot, on divise par $3!$ car les permutations qui se contentent d'échanger les E entre eux ne modifient pas l'anagramme). Par exemple, le nombre d'anagrammes du mot DENOMBREMENT est $\dfrac{12!}{3! \times 2! \times 2!}$.

Définition 5. Une **combinaison** de p éléments dans un ensemble fini E à n éléments est un sous-ensemble à p éléments de E.

Définition 6. Soient n et p deux entiers tels que $p \leqslant n$, on appelle **coefficient binomial** d'indices n et p le nombre $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ (qui se lit « p parmi n »).

Remarque 5. On pose souvent $\dbinom{n}{p} = 0$ si $p > n$.

> **Proposition 9.** Le nombre total de sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments vaut $\dbinom{n}{p}$.

Démonstration. En effet, une combinaison n'est rien d'autre qu'un arrangement dans lequel on a enlevé l'importance de l'ordre. Autrement dit, chaque combinaison apparait $p!$ fois quand on dénombre les arrangements (puisqu'il y a $p!$ façons d'ordonner un ensemble à p éléments), donc le nombre de combinaisons à p éléments vaut $\dfrac{n!}{(n-p)!} \times \dfrac{1}{p!} = \dbinom{n}{p}$. □

Exemple : Toujours dans la même urne que précédemment, on tire désormais les quatre boules simultanément. Le nombre de tirages est $\dbinom{10}{4} = \dfrac{10!}{6! \times 4!} = 210$.

Remarque 6. On peut interpréter tous les outils mathématiques vus dans cette partie du cours comme nomnbre d'applications entre ensembles finis vérifiant certaines propriétés. En notant $E = \{1, 2, \dots, p\}$ et $F = \{1, 2, \dots, n\}$:

- Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est aussi le nombre d'applications de E vers F. En effet, se donner une telle application f revient à se donner les valeurs des images $f(1)$, $f(2)$, …, $f(p)$, c'est-à-dire à se donner une liste de p éléments de E.
- Le nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments correspond au nombre d'application injectives de E vers F (puisqu'imposer l'injectivité revient exactement à interdire les répétitions dans la liste des images des éléments de E).
- Si $p = n$, le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments correspond au nombre d'applications bijectives de E dans lui-même.
- Le nombre de combinaisons de p éléments dans un ensemble à n éléments représente le nombre d'applications strictement croissantes de E vers F (il suffit en effet de choisir les p images des éléments de E et de les associer dans l'ordre croissant aux entiers de l'ensemble E)

Un petit tableau pour résumer les cas d'utilisations de ces trois outils de dénombrement :

	L'ordre n'est pas important	L'ordre est important
Répétitions possibles		Listes → puissances
Répétitions interdites	Combinaisons → coefficients binômiaux	Arrangements → quotient de factorielles

3 Propriétés des coefficients binomiaux.

Proposition 10. Quelques valeurs à connaitre :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dbinom{n}{0} = 1$ et $\dbinom{n}{n} = 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dbinom{n}{1} = n$ et $\dbinom{n}{n-1} = n$.
- $\forall n \geqslant 2$, $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Démonstration. Il suffit à chaque fois de reprendre la définition des coefficients binômiaux comme quotients de factorielles, par exemple $\dbinom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!n!} = 1$ puisque $0! = 1$, ou encore $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. □

Proposition 11. Quelques formules faisant intervenir les coefficients binômiaux :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symétrie des coefficients binômiaux).
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ (formule sans nom).
- $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$ (relation de Pascal).

Démonstration.

- La propriété de symétrie est très facile à démontrer : $\binom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$. Il y a également une interprétation combinatoire de ce résultat : choisir un sous-ensemble de k éléments dans un ensemble à n éléments est équivalent à choisir son complémentaire, qui est constitué de $n-k$ éléments, donc il y a autant de sous-ensembles à k éléments et à $n-k$ éléments dans un ensemble à n éléments.
- Pour la formule « sans nom », on passe par le calcul : $k\binom{n}{k} = \dfrac{k \times n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$, et $n\binom{n-1}{k-1} = \dfrac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$, les deux quantités sont bien égales.
- Enfin, la formule de Pascal est tellement fondamentale qu'on va en donner deux démonstrations distinctes. D'abord via un calcul brital de mise au même dénominateur : $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \dfrac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \dfrac{(n-k) \times (n-1)! + k \times (n-1)!}{k!(n-k)!}$ $= \dfrac{n \times (n-1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$.
  Ensuite on peut encore effectuer une démonstration combinatoire. Soit E un ensemble à n éléments et x un élément fixé de E. Les sous-ensembles de E à k éléments, au nombre de $\binom{n}{k}$, se répartissent en deux catégories : ceux qui contiennent x, qui sont au nombre de $\binom{n-1}{k-1}$ puisqu'il reste $k-1$ éléments à choisir parmi les $n-1$ restants dans E une fois x choisi ; et ceux qui ne contiennent pas x, qui sont au nombre de $\binom{n-1}{k}$ puisqu'il reste cette fois-ci k éléments à choisir parmi les $n-1$ restants (on n'en a encore choisi aucun). D'où la formule.

$\square$

Triangle de Pascal : La relation de Pascal permet de calculer les valeurs des coefficients binomiaux par récurrence, en les répartissant sous forme d'un tableau triangulaire (chaque coefficient du tableau est la somme de celui qui se trouve juste au-dessus de lui et de celui qui se trouve à gauche du précédent) :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$n=0$	1								
$n=1$	1	1							
$n=2$	1	2	1						
$n=3$	1	3	3	1					
$n=4$	1	4	6	4	1				
$n=5$	1	5	10	10	5	1			
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1		
$n=7$	1	7	21	35	35	21	7	1	
$n=8$	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Théorème 2. Formule du binôme de Newton.
Soient a et b deux nombres complexes, et $n \in \mathbb{N}$, alors $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Remarque 7. On peut obtenir à partir de cette formule le développement d'une différence : $(b-a)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^k b^{n-k}$. En pratique, il suffit d'alterner les signes.

Exemple : $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$. L'ordre est inversé par rapport à celui de la formule, mais c'est la façon habituelle d'écrire le développement. Autre exemple : $(1-2x)^5 = 1 - 5\times 2x + 10\times(2x)^2 - 10\times(2x)^3 + 5\times(2x)^4 - (2x)^5 = 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^5 - 32x^5$.

Démonstration. On va procéder par récurrence sur l'entier n. Pour $n = 0$, la formule du binome dit simplement que $(a+b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0$, ce qui est vrai (on a 1 de chaque côté). Supposons maintenant la formule vraie au rang n, alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \times (a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \qquad \text{(développement du produit par } a+b\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \qquad \text{(changement d'indice dans la première somme)} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\
&\qquad \text{(isolement d'un terme dans chaque somme)} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \qquad \text{(relation de Pascal)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \qquad \text{(insertion des termes extrêmes dans la somme)}
\end{aligned}$$

□

Proposition 12. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini, de cardinal 2^n.
Formulation équivalente : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Démonstration. Le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est le nombre de sous-ensembles de E. Or, on sait que, pour tout entier k, il y a $\displaystyle\binom{n}{k}$ sous-ensembles de E à k éléments, ce qui fait au total $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ sous-ensembles. Cette somme n'est rien d'autre qu'un cas particulier de formule du binôme, pour $a = b = 1$, donc elle vaut $(1+1)^n = 2^n$.

Encore une fois, on peut aussi voir les choses de façon plus combinatoire : pour construire un sous-ensemble (sans fixer le nombre d'éléments) d'un ensemble E contenant n éléments, on doit faire un choix binaire pour chaque élément de l'ensemble (soit on le prend dans le sous-ensemble, soit on ne le prend pas), ce qui donne bien 2^n possibilités. $\square$

Il est maintenant temps de répondre aux trois questions posées en début de chapitre :

- Il faudrait déjà que l'énoncé précise comment sont effectués les tirages (simultanés ou non, remise ou non des boules après chaque tirage). Une fois admis que l'ordre n'a aucune importance et que nous allons donc considérer les tirages comme simultanés, c'est une application directe du cours, il y a $\displaystyle\binom{49}{7} = 85\ 900\ 584$ grilles différentes au Loto.
- On supposera bien sûr pour le calcul que chaque élève de la classe a une probabilité égale d'être né chacun des 365 jours de l'année. Le nombre de choix possibles pour les 45 dates de naissance des élèves de la classe est $365^4 5$ puisqu'on a 365 dates possibles pour chaque élève (et que les répétitions sont évidemment a priori possible). Si on ne veut **pas** de répétition (donc des élèves tous nés à des dates distinctes), il n'y a plus que $\dfrac{365}{320}$ possibilités (arrangements au lieu de listes). Autrement dit, la probabilité que tous les élèves soient nés à des dates différentes vaut $\dfrac{365!}{320! \times 365^{45}} \simeq 0.059$. La probabilité qu'au moins deux élèves soient nés le même jour vaut donc environ $1 - 0.059 = 0.941$. L'existence d'anniversaires simultanés est pratiquement certaine.
- Pour constituer le premier trinôme, il faut choisir 3 élèves parmi les 45 élèves de la classe. Pour le deuxième, on choisit 3 élèves parmi les 42 restants, et ainsi de suite jusqu'à avoir à prendre 3 élèves parmi les 3 derniers pour le dernier trinôme (autant dire qu'on n'a plus le choix). Reste à diviser tous ces choix par 15! puisque l'ordre des 15 groupes de colle n'est pas important (l'ordre au sein de chaque groupe de colle a déjà été négligé quand on a travaillé avec des combinaisons), soit $\displaystyle\binom{45}{3} \times \binom{42}{3} \times \binom{39}{3} \times \binom{36}{3} \times \binom{33}{3} \times \binom{30}{3} \times \binom{27}{3} \times \binom{24}{3} \times \binom{21}{3} \times \binom{18}{3} \times \binom{15}{3} \times \binom{12}{3} \times \binom{9}{3} \times \binom{6}{3} \times \binom{3}{3} \times \frac{1}{15!}$ répartitions possibles. Si on écrit tout sous forme de quotient de factorielles, ça se simplifie beaucoup pour laisser $\dfrac{45!}{(3!)^{15} \times 15!}$ (qui est accessoirement un nombre gigantesque, environ 1.95×10^{32}). On peut retrouver ce résultat directement : on choisit un ordre sur les 45 élèves (d'où le numérateur), puis on découpe la liste ordonnée de 45 élèves en 15 paquets de 3. L'ordre dans chacun des 15 paquets n'a aucune importance (on divise donc 15 fois de suite par 3!) et l'ordre des 15 paquets n'a pas non plus d'importance, donc on divise encore par 16!.