Chapitre 22 : Couples de variables aléatoires.

PTSI B Lycée Eiffel

15 juin 2021

Cette chose plus compliquée et plus confondante
que l'harmonie des sphères : un couple.

Julien Gracq.

Dans ce dernier (court) chapitre de probabilités de l'année, nous allons introduire l'étude de couples de variables aléatoires, c'est-à-dire l'étude simultanée de deux variables aléatoires. Rien de très nouveau au niveau des techniques utilisées, à tel point d'ailleurs qu'il n'y aura à peu près aucun théorème ou proposition dans ce chapitre, le but est simplement de présenter un peu de vocabulaire et de faire quelques calculs sur trois exemples détaillés.

Objectifs du chapitre :

- bien comprendre la différence entre lois marginales, lois conditionnelles et loi de couple.
- savoir utiliser des lois de couples pour étudier des variables aléatoires.

1 Lois d'un couple de variables aléatoires.

Le pluriel dans le titre n'est pas une erreur, la principale chose à bien assimiler ici est le vocabulaire concernant les différents types de lois qu'on peut associer à un couple de variables aléatoires. Les trois exemples numérotés qui seront rapidement introduits ci-dessous seront repris dans tout le chapitre pour servir d'illustration aux concepts définis.

Définition 1. Un couple de variables aléatoires (X, Y) est la donnée de deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé Ω. Une façon plus technique de voir les choses est de dire qu'un couple est une application $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$.

Exemple 1 : On lance simultanément deux dés (ça faisait longtemps), et on note X le plus grand des deux chiffres obtenus et Y le plus petit (au sens large).

Exemple 2 : Une urne contient 3 boules rouges, 4 boules vertes et 2 boules bleues. On tire 3 boules simultanément dans l'urne et on note X le nombre de boules rouges obtenues et Y le nombre de boules vertes.

Exemple 3 : On effectue une suite de lancers avec une pièce déséquilibrée pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\frac{3}{4}$ (et celle d'obtenir face vaut donc $\frac{1}{4}$). On note X la longueur de la première chaîne obtenue, c'est-à-dire le nombre de tirages initiaux donnant le même résultat que le premier tirage. On note Y la longueur de la deuxième chaîne (nombre de tirages identiques à partir du lancer où a eu lieu le premier changement). Une chaîne peut très bien être de longueur 1. Ainsi, si les premiers tirages donnent $PPPPFFP$ (peu importe la suite), on aura $X = 4$ (on a commencé par Pile et on en a obtenu quatre de suite avant de changer pour tomber sur Face) et $Y = 2$ (la deuxième chaîne est la chaîne constituée des deux Face obtenus au cinquième et au sixième lancer).

Définition 2. La **loi conjointe** d'un couple de variables aléatoires (X, Y) est la donnée de toutes les probabilités $P((X = i) \cap (Y = j))$, pour $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$.

Remarque 1. Cette loi est souvent présentée sous forme d'un tableau à double entrée, les valeurs prises par X apparaissant par exemple en ligne et celles prises par Y en colonne. C'est l'équivalent « à deux dimensions » des tableaux de loi qu'on faisait déjà pour des variables aléatoires classiques dans notre précédent chapitre de probabilités. On pourrait bien sûr imaginer étudier de la même façon des triplets de variables aléatoires (X, Y, Z), mais la représentation de la loi complète d'un tel triplet nécessiterait un tableau à trois dimensions, ce qui pose des problèmes évidents en pratique (même si on peut toujours représenter un tel tableau « tranche par tranche » sur une feuille de papier). Bien sûr, il arrivera aussi qu'on trouve une formule générale pour $P((X = i) \cap (Y = j))$ qui évitera de faire le tableau de la loi (et ce sera même nécessaire dans notre troisième exemple où les variables constituant le couple ne sont pas finies, ce qui constitue d'ailleurs un léger débordement par rapport au programme de première année).

Remarque 2. Certaines des probabilités $P((X = i) \cap (Y = j))$ peuvent être nulles, même si $P(X = i)$ et $P(Y = j)$ sont toutes les deux non nulles. Il arrivera donc régulièrement que certaines cases du tableau représentant la loi conjointe contiennent la valeur 0. En pratique, c'est d'ailleurs la chose qu'on essaie de repérer en premier (on place tous les 0 dans le tableau avant de calculer les probabilités correspondant aux cases restantes).

Exemple 1 : On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et la loi conjointe se calcule ici sans difficulté : $P((X = i) \cap (Y = j)) = 0$ si $i < j$ (le plus grand nombre ne peut pas être inférieur au plus petit), $P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{36}$ si $i = j$ (le seul tirage favorable sur les 36 possibles est le tirage (i, i)), et $P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{18}$ si $i > j$ (les deux tirages (i, j) et (j, i) sont possibles), ce qu'on peut résumer par le tableau suivant (X en ligne, Y en colonne) :

$Y \backslash X$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

Remarque 3. La somme de toutes les probabilités présentes dans le tableau doit logiquement être égale à 1.

Exemple 2 : On a ici $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ et $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ (si on avait noté Y le nombre de boules bleues et pas vertes, les deux variables ne prendraient pas les mêmes valeurs, ce qui ne pose aucun problème). On ne peut bien sûr pas avoir $X + Y > 3$ puisqu'on ne tire que trois boules, ce qui permet déjà de mettre des 0 dans toutes les cases « en-dessous de la diagonale » dans le tableau. On aura également $P((X = 0) \cap (Y = 0)) = 0$, puisqu'on ne peut pas tirer trois boules bleues (il n'y en a que deux dans l'urne !). Lorsque cela a un sens, on a en fait $P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{\binom{3}{i}\binom{4}{j}\binom{2}{3-i-j}}{\binom{9}{3}}$ (puisqu'il faut choisir les i boules rouges parmi les trois disponibles, les j boules vertes parmi les quatre disponibles, et il reste $3 - i - j$ boules bleues à prendre parmi les deux que compte l'urne ; le dénominateur représente bien sûr le nombre total de tirages possibles de 3 boules dans une urne qui en contient 9, en l'occurrence égal à 84). Par exemple, $P((X=1)\cap(Y=1)) = \dfrac{\binom{3}{1}\times\binom{4}{1}\times\binom{2}{1}}{84} = \dfrac{24}{84} = \dfrac{2}{7}$ (même si on ne simplifiera pas les fractions dans le tableau de la loi). On obtient le tableau suivant :

$Y\backslash X$	0	1	2	3
0	0	$\frac{3}{84}$	$\frac{6}{84}$	$\frac{1}{84}$
1	$\frac{4}{84}$	$\frac{24}{84}$	$\frac{12}{84}$	0
2	$\frac{12}{84}$	$\frac{18}{84}$	0	0
3	$\frac{4}{84}$	0	0	0

Remarque 4. On note parfois l'évenement $(X=i)\cap(Y=j)$ sous la forme $(X,Y)=(i,j)$.

Définition 3. Si (X,Y) est un couple de variables aléatoires, les lois de X et de Y (en tant que variables aléatoires « classiques » étudiées indépendemment l'une de l'autre) sont appelées **lois marginales** du couple.

Proposition 1. Si (X,Y) est un couple de variables aléatoires discrètes, on peut obtenir les lois marginales à partir de la loi conjointe : $\forall i \in X(\Omega)$, $P(X=i) = \sum\limits_{j\in Y(\Omega)} P((X=i)\cap(Y=j))$ (et symétriquement pour la loi de Y).

Démonstration. Cela découle immédiatement du fait que les événements $Y=j$ forment un système complet d'événements. C'est en fait exactement la formule des probabilités totales appliquée à ce système particulier. □

Exemple 1 : Pour connaitre les lois marginales à partir du tableau précédemment établi, c'est très simple, il suffit de faire les sommes des lignes du tableau (pour la loi Y) ou des colonnes (pour celle X), ce qu'on matérialise en pratique en ajoutant une ligne et une colonne au tableau :

	1	2	3	4	5	6	$P(Y=j)$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{11}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{9}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$P(X=i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	

Exemple 2 : De façon tout à fait similaire, on va retrouver la loi de X sur la dernière ligne du tableau et celle de Y dans la dernière colonne :

	0	1	2	3	$P(Y=j)$
0	0	$\frac{3}{84}$	$\frac{6}{84}$	$\frac{1}{84}$	$\frac{10}{84}$
1	$\frac{4}{84}$	$\frac{24}{84}$	$\frac{12}{84}$	0	$\frac{40}{84}$
2	$\frac{12}{84}$	$\frac{18}{84}$	0	0	$\frac{30}{84}$
3	$\frac{4}{84}$	0	0	0	$\frac{4}{84}$
$P(X=i)$	$\frac{20}{84}$	$\frac{45}{84}$	$\frac{18}{84}$	$\frac{1}{84}$	

Remarque 5. On vient de voir qu'on pouvait déduire les lois marginales de la loi conjointe. Le contraire n'est pas possible en général.

Exemple 3 : ici, $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (théoriquement d'ailleurs, si on tire toujours le même côté de la pièce, Y n'a même pas de valeur puisque la première chaîne ne s'arrête jamais ; en pratique ce cas a une probabilité nulle, tout comme le fait que Y prenne une valeur infinie, on peut ne pas les prendre en compte pour les calculs qui suivent). On n'est donc pas dans le cadre de ce cours (les variables sont infinies), mais cet exemple va permettre de présenter un principe essentiel de l'utilisation des couples de variables aléatoires : passer par la loi conjointe et la formule des probabilités totales pour retrouver la loi marginale de la deuxième variable, qu'on aurait beaucoup de mal à trouver directement. Vous retrouverez **très** souvent ce genre de calculs l'an prochain, il est essentiel de bien en comprendre le principe.

Commençons par calculer la loi (marginale) de la variable X (sans s'intéresser pour l'instant au couple) : on aura $X = k$ si la suite de lancers commence par k Pile suivis d'un Face ou par k Face suivis d'un Pile (peu importe ce qui se produira après), ces deux cas sont incompatibles et $P(\underbrace{PP\dots PP}_{k \text{ fois}}F) = \left(\frac{3}{4}\right)^k \times \frac{1}{4}$. De même, $P(\underbrace{FF\dots FF}_{k \text{ fois}}P) = \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \frac{3}{4}$, donc $P(X = k) = \left(\frac{3}{4}\right)^k \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \frac{3}{4} = \frac{3^k + 3}{4^{k+1}}$. Profitons-en pour vérifier que la somme de toutes ces probabilités est égale à 1 (ce qui revient à dire que le cas où la première chaîne est infinie a une probabilité nulle). Il s'agit d'un calcul de série géométrique que nous sommes tout à fait capables de faire (inutile de s'embêter avec la convergence, cette série à termes positifs est nécessairement majorée par 1 et donc convergente). Il faut juste faire attention au fait que les sommes commencent à $k = 1$, il faut donc enlever le première terme par rapport à la formule classique des séries géométriques (ou décaler les indices) : $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k + \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}} - 1\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$

Déterminons maintenant la loi conjointe du couple (X, Y). Le principe est exactement le même que pour le calcul de la loi de X : on aura $(X, Y) = (i, j)$ si on débute par i Pile, suivis de j Face et à nouveau d'un Pile ; ou bien par i Face, suivis de j Pile et d'un Face. Tout cela s'additionne pour donner une probabilité $P((X = i) \cap (Y = j)) = \left(\frac{3}{4}\right)^i \times \left(\frac{1}{4}\right)^j \times \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^i \times \left(\frac{3}{4}\right)^j \times \frac{1}{4} = \frac{3^{i+1} + 3^j}{4^{i+j+1}}$. Il est bien sûr hors de question ici de présenter tout ça sous forme de tableau, on est très contents d'avoir une formule générale pas trop horrible.

Il reste à calculer la loi marginale de Y. Je vous laisse vous convaincre que calculer directement la probabilité de l'événement $Y = j$ est essentiellement impossible (car elle dépend profondément de ce qui s'est passé avant le début de la deuxième chaîne). Par contre, on peut obtenir cette probabilité à l'aide de la formule des probabilités totales : les événements $X = i$ forment un système complet d'événements (il faut bien sûr tous les prendre, ce qui fait un système constitué d'une infinité d'événements, mais ça ne change rien à la formule ; notons d'ailleurs que le système est « presque complet » dans la mesure où on oublie le cas d'une première chaîne infinie, mais comme ce cas a une probabilité nulle ça n'a pas d'importance). On écrit donc $P(Y = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i) \times P_{X=i}(Y = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j)) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{3^{i+1} + 3^j}{4^{i+j+1}} = \frac{1}{4^j}\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{i+1} + \left(\frac{3}{4}\right)^j \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{4^{i+1}} = \frac{1}{4^j}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{3}{4}} + \left(\frac{3}{4}\right)^j \frac{1}{4^2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{3^2 + 3^{j-1}}{4^{j+1}}$. On constate que la loi de Y n'est pas du tout la même que celle de X (ce qui n'était pas totalement évident a priori). On peut là aussi vérifier que la somme des probabilités est égale à 1 : $\sum_{j=1}^{+\infty} P(X = j) = \frac{9}{4}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{4^j} + \frac{1}{12}\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^j = \frac{9}{4} \times \left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1\right) + \frac{1}{12} \times \left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}} - 1\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$

Définition 4. La **loi conditionnelle de** X **sachant** $Y = j$ est la loi de la variable Z définie par $\forall i \in X(\Omega)$, $P(Z = i) = P_{Y=j}(X = i)$. On définit de même les lois conditionnelle de Y sachant $X = i$.

Exemple 1 : si on reprend l'exemple 1 et qu'on souhaite obtenir par exemple la loi conditionnelle de Y sachant $X = 4$, on se place (dans le tableau bidimensionnel fait auparavant) « dans la colonne » correspondant à $X = 4$. On constate alors que les seules valeurs possibles pour Y sont 1, 2, 3 et 4, avec des probabilités respectives $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{18}$ et $\frac{1}{36}$. Mais attention, ces probabilités sont des probabilités **d'intersection** et non des probabilités **conditionnelles** (d'ailleurs, leur somme n'est pas égale à 1, ce qui n'est pas possible pour une loi de variable aléatoire). Pour obtenir notre loi conditionnelle, on doit donc diviser ces probabilités par $P(X = 4)$, c'est-à-dire en fait par leur somme égale à $\frac{7}{36}$. La loi conditionnelle recherchée serait donc donnée par le tableau suivant :

k	1	2	3	4
$P_{X=4}(Y = k)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

2 Indépendance de variables aléatoires.

Définition 5. Deux variables aléatoires sont dites **indépendantes** si tous les couples d'événements $X = i$, $Y = j$ sont indépendants. Autrement dit, $\forall i \in X(\Omega)$, $\forall j \in Y(\Omega)$, $P((X = i) \cap (Y = j)) = P(X = i)P(Y = j)$.

Exemple : Un exemple idiot pour illustrer. Si on tire deux dés simultanément et qu'on note X le résultat du premier dé et Y celui du deuxième dé, X et Y sont des variables aléatoires indépendantes. On a $P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{36}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant 6$ et $1 \leqslant j \leqslant 6$.

Exemple : Par contre, toujours dans le cas de l'inépuisable lancer de deux dés, si on prend pour X la somme des deux dés et pour Y leur produit, les deux variables ne sont pas indépendantes. On a par exemple $P(X = 8) = \frac{5}{36}$, $P(Y = 15) = \frac{1}{18}$, et $P((X = 8) \cap (Y = 15)) = \frac{1}{18}$.

Remarque 6. Deux variables aléatoires sont indépendantes si et seulement si toutes les lois conditionnelles de X sachant $Y = j$ sont identiques à la loi de X.

Remarque 7. Dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, on peut obtenir la loi conjointe du couple (X, Y) à partir des deux lois marginales.

Exemples : Dans nos deux premiers exemples, on constate sans difficulté et sans surprise que les variables X et Y ne sont pas indépendantes (le fait qu'on ait des 0 dans la tableau de la loi conjointe suffit à imposer qu'il n'y ait pas indépendance).

Le troisième exemple est moins intuitif. Le calcul des lois conditionnelles, qui sont distinctes de la loi marginale de X, prouve qu'il n'y a pas non plus indépendance. Une autre façon de voir les choses est de trouver un contre-exemple à l'indépendance des évènements $X = i$ et $Y = j$. On peut ici calculer simplement $P(X = 1) = \frac{3+3}{4^2} = \frac{3}{8}$, $P(Y = 1) = \frac{3^2+1}{4^2} = \frac{5}{8}$ et $P((X = 1) \cap (Y = 1)) = \frac{3^2+3}{4^3} = \frac{3}{16} \neq \frac{3}{8} \times \frac{5}{8}$. Les courageux vérifieront qu'en effectuant la même expérience avec une pièce équilibrée, on obtiendrait deux variables aléatoires indépendantes.

Proposition 2. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, on a $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$, et $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Remarque 8. On peut calculer facilement la variance d'une loi binomiale à partir de la proposition précédente. En effet une loi binomiale de paramètre (n, p) est la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, qui ont chacune pour variance $p(1-p)$. La variance de la binomiale vaut donc $np(1-p)$.

Proposition 3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales $\mathcal{B}(m, p)$ et $\mathcal{B}(n, p)$ alors $X+Y$ suit une loi binomiale de paramètre $\mathcal{B}(m+n, p)$.

Démonstration. C'est intuitivement évident (en gros on effectue m fois de suite une expérience suivant un schéma de Bernoulli, puis on recommence n fois de suite, et on compte à la fin le nombre total de succès), mais pas si facile à démontrer rigoureusement (si on tente un calcul brutal, il nécessite la formule de Vandermonde, formule de dénombrement qui n'est pas à votre programme). On ne le fera donc pas. □

Remarque 9. Quand deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes, il existe un outil destiné à mesurer leur « défaut d'indépendance ». C'est ce qu'on appelle le coefficient de corrélation. Il s'agit d'un nombre compris entre -1 et 1, qui vaut 0 quand les variables sont indépendantes, et qui se rapproche d'autant plus de 1 ou de -1 qu'il y a un lien fort entre les deux variables. Si ce coefficient est positif, on dit que les variables sont corrélées positivement (Y a tendance à prendre des grandes valeurs quand X prend des grandes valeurs, et réciproquement ; le cas extrême est celui où le coefficient est égal à 1, dans ce cas les variables sont proportionnelles et on peut déduire de façon certaine la valeur de Y de la connaissance de celle de X). Si le coefficient est négatif, les variables sont corrélées négativement, Y prend des valeurs d'autant plus petites que X prend de grandes valeurs (si le coefficient atteint la valeur -1, Y est inversement proportionnelle à X). Ce coefficient se calcule lui-même à l'aide de la covariance (qui, comme son nom l'indique, a des similitudes avec la variance) que vous étudierez l'an prochain. Vous remarquerez d'ailleurs que nous n'avons que très peu parlé d'espérance et de variance dans ce chapitre, car nous ne pouvons pas faire grand chose de plus avec ces outils que les appliquer séparément aux deux variables formant le couple. Tout de même, nous allons terminer avec de beaux calculs d'espérance.

Exemple 3 : Un dernier calcul intéressant sur cette expérience (quoique ne faisant pas vraiment intervenir le fait qu'on travaille sur un couple) est celui des espérances de X et de Y. Un problème dans le cadre de variables infinies est que cette espérance n'existe pas forcément, mais ici on va très vite reconnaitre des séries géométriques dérivées convergentes, on se permettra donc de travailler directement avec des sommes infinies : $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \frac{3^k+3}{4^{k+1}} = \frac{3}{4^2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} + \frac{3}{4^2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{3}{4^2} \left(\frac{1}{(1-\frac{3}{4})^2} + \frac{1}{(1-\frac{1}{4})^2} \right) = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$.

Pour Y, on a $E(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \frac{3^2+3^{k-1}}{4^{k+1}} = \frac{3^2}{4^2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} + \frac{1}{4^2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \frac{3^2}{4^2} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{4})^2} + \frac{1}{4^2} \times \frac{1}{(1-\frac{3}{4})^2} = 1+1 = 2$. Encore une fois, les courageux pourront faire le calcul avec une pièce équilibrée et constater que dans ce cas les deux variables ont pour espérance 2. Tout cela est en fait très normal. Quand la pièce est déséquilibrée, on a plus de chances d'avoir une première chaîne constituée de Pile que de Face. Mais le fait qu'on commence par un Pile augmente la probabilité que la chaîne soit longue puisqu'on a ensuite à chaque tirage plus de chances d'obtenir Pile que Face. Au contraire, la deuxième chaîne étant plus souvent constituée de Face, elle sera en moyenne plus courte que la première. Ce qui est (beaucoup !) moins évident, c'est le fait que cette deuxième chaîne ait une longueur moyenne « normale », c'est-à-dire identique à celles des chaînes obtenues avec une pièce équilibrée (pour laquelle il n'y a logiquement pas de différence entre première et deuxième chaîne). En fait, plus on déséquilibre la pièce (en faisant tendre la probabilité de tomber sur Pile vers 1, par exemple, plus la longueur moyenne de la première chaîne va devenir grande, mais celle de la deuxième chaîne sera toujours égale à 2. Bien sûr, la troisième chaîne aura à nouveau une longueur moyenne égale à celle de la première chaîne, la quatrième une longueur moyenne égale à 2 etc.