Programme de colle n° 9

PTSI B Lycée Eiffel

semaine du 14/12 au 18/12 2020

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 6 : Nombres complexes.

- Structure de l'ensemble $\mathbb{C}$:
  — forme algébrique, parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe
  — identification de $\mathbb{C}$ avec le plan $\mathbb{R}^2$, image d'un nombre complexe dans le plan, affixe complexe d'un point du plan
  — somme, produit de deux nombres complexes, conjugué, module d'un nombre complexe et propriétés élémentaires, interprétation géométrique de la conjugaison et du module
  — inégalité triangulaire $||z| - |z|'| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ (la **démonstration** de l'inégalité de droite peut être demandée)
  — équations de cercles (on doit être capable de reconnaitre un cercle à partir de n'importe quelle forme de son équation)
  — écriture exponentielle des nombres complexes de module 1, argument d'un nombre complexe, propriétés de l'argument
- Applications du calcul complexe en trigonométrie :
  — formules d'Euler, formule de Moivre
  — calcul de $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et $\sin(x)$
  — linéarisation de $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$ (on rappelle que la formule du binôme de Newton n'a pas encore été revue, mais les élèves doivent être capables d'en calculer les coefficients à l'aide du triangle de Pascal si besoin)
  — factorisation par l'angle moitié pour obtenir la forme exponentielle d'expressions du type $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$
- Résolution des équations du second degré à coefficients complexes (via calcul d'une racine carrée de Δ sous forme algébrique).
- Racine n-èmes de nombres complexes :
  — racines n-èmes de l'unité : **formule explicite**, interprétation géométrique (on doit savoir que les racines n-èmes forment un polygone régulier centré en l'origine), nullité de la somme des racines n-èmes
  — calcul des racines n-èmes d'un nombre complexe sous forme exponentielle
- Étude de quelques fonctions complexes, prétexte à questions d'interprétation géométrique (du style « Déterminer les nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in i\mathbb{R}$ » pour obtenir une équation de cercle)

- Application des nombres complexes à la géométrie :
  — affixe complexe d'un vecteur, affixe du milieu d'un segment et d'un centre de gravité de triangle
  — écriture complexe des translations, rotations, homothéties, symétries par rapport aux axes du repère
  — classification des isométries et similitudes du plan à l'aide des nombres complexes (on doit être capable, à partir de l'expression explicite d'une similitude, de déterminer son type, et le cas échéant son centre, son angle et son rapport)

Chapitre 7 : Dénombrement.

- Cardinal d'un ensemble fini : définition et notations (sont acceptés : $\mathrm{card}(E)$, $|E|$ ou $\sharp E$), propriétés élémentaires ($|\overline{A}| = |E| - |A|$, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, la formule du crible générale n'est pas à connaitre mais les élèves doivent être capables de l'énoncer dans le cas d'une union de trois ou quatre ensembles).
- Listes, arrangements et combinaisons :
  — définition des p-listes d'un ensemble E, dénombrement des p-listes, exemple fondamental des tirages successifs avec remise dans une urne
  — définition des arrangements de p éléments d'un ensemble, dénombrement des arrangements comme quotient de factorielles, exemple fondamental des tirages successifs sans remise dans une urne, cas particulier des permutations des éléments d'un ensemble, dénombrement des anagrammes d'un mot
  — définition des combinaisons comme sous-ensembles à p éléments d'un ensemble fini, dénombrement des combinaisons et définition des coefficients binômiaux, exemple fondamental des tirages simultanés dans une urne
  — les propriétés théoriques des coefficients binomiaux (relation de Pascal, formule du binôme de Newton etc) ne sont PAS au programme cette semaine (mais les élèves peuvent s'ils le souhaitent utiliser le triangle de Pascal pour calculer les valeurs de petits coefficients binômiaux)

Prévisions pour 2021 : du dénombrement, ensuite on enchaînera avec les suites.