# Programme de colle n$^{\circ}$ 25

PTSI B Lycée Eiffel

semaine du 07/06 au 11/06 2021

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

## Chapitre 18 : Applications linéaires.

- Vocabulaire : application linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme.
- Noyau et image d'une application linéaire : définition, caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'un morphisme, calcul de l'image sous la forme $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ quand $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de l'espace de départ de l'application linéaire.
- Notation $f^n$ pour désigner les composées successives d'un endomorphisme par lui-même.
- Rang d'une famille de vecteurs, rang d'une application linéaire, théorème du rang.
- Équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité pour un endomorphisme en dimension finie (un contre-exemple a été vu en dimension infinie).
- Application linéaires « géométriques » :
  - — homothéties
  - — projection sur un sous-espace $F$ parallèlement à un sous-espace supplémentaire $G$, caractérisation des projections par la relation $p^2 = p$, caractérisation des sous-espaces $F$ et $G$ comme image et noyau de la projection $p$, caractérisation de l'image comme $\ker(p - \mathrm{id})$
  - — symétrie par rapport à un sous-espace $F$ parallèlement à un sous-espace supplémentaire $G$, caractérisation des symétries par la relation $s^2 = \mathrm{id}$, caractérisation des sous-espaces $F$ et $G$ comme noyaux de $s - \mathrm{id}$ et de $s + \mathrm{id}$, relation $s = 2p - \mathrm{id}$ entre symétrie et projection ayant les mêmes éléments caractéristiques

## Chapitre 19 : Matrices et algèbre linéaire.

- Matrice d'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension $E$ dans une base de $E$.

- Matrice d'une application linéaire $f$ entre espaces vectoriels de dimension finie dans une base $\mathcal{B}$ de l'espace de départ et dans une base $\mathcal{C}$ de l'espace d'arrivée. Cette matrice sera notée $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, ou plus simplement $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ dans le cas d'un endomorphisme. On pourra utiliser la notation *can* pour désigner la base canonique d'un espace usuel.
- Opérations basiques sur les matrices d'application linéaire : formule $Y = MX$ quand $Y$ représente le vecteur-colonne des coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{C}$, et $X$ le vecteur-colonne des coordonnées de $u$ dans la base $\mathcal{B}$ ; $NM$ est la matrice représentative de $g \circ f$ dans des bases cohérentes avec celles de la définition de $M$ et de $N$, application à la caractérisation des symétries, des projecteurs et à la bijectivité d'une application linéaire.
- Formules de changements de bases :
  - définition de la matrice de passage entre deux bases d'un même espace vectoriel, inversibilité des matrices de passage
  - formule $X' = P^{-1}X$ pour le calcul des coordonnées d'un vecteur dans une nouvelle base
  - formule $M' = Q^{-1}MP$ pour le changement de bases pour la matrice d'un endomorphisme. En pratique, on n'utilisera pratiquement que le cas particulier $M' = P^{-1}MP$ pour les endomorphismes
- Déterminants :
  - Déterminant de deux vecteurs dans le plan, de trois vecteurs dans l'espace, définition géométrique, interprétation en terme de calcul d'aire ou de volume, formule à l'aide des coordonnées (règle de Sarrus dans $\mathbb{R}^3$), propriétés théoriques (bi- ou trilinéarité, alternance, antisymétrie)
  - Déterminant de $n$ vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ : définition comme unique application multilinéaire alternée valant 1 sur la base canonique (rien de démontré, bien entendu)
  - Déterminant d'une matrice carrée, inversibilité de $M$ ssi $\det(M) \neq 0$, propriétés élémentaires ($\det({}^tM) = \det(M)$, $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$, $\det(MN) = \det(M)\det(N)$), effet des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes sur le calcul du déterminant, développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne
  - déterminant d'une application linéaire, invariance du déterminant par changement de base

Prévisions pour la dernière semaine : encore le chapitre 19, et un peu de séries numériques.