Programme de colle n$^{\text{o}}$ 24

PTSI B Lycée Eiffel

semaine du 31/05 au 04/06 2021

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 18 : Applications linéaires.

- Vocabulaire : application linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme.
- Noyau et image d'une application linéaire : définition, caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'un morphisme, calcul de l'image sous la forme $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ quand $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de l'espace de départ de l'application linéaire.
- Notation f^n pour désigner les composées successives d'un endomorphisme par lui-même.
- Rang d'une famille de vecteurs, rang d'une application linéaire, théorème du rang.
- Équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité pour un endomorphisme en dimension finie (un contre-exemple a été vu en dimension infinie).
- Application linéaires « géométriques » :
  - homothéties
  - projection sur un sous-espace F parallèlement à un sous-espace supplémentaire G, caractérisation des projections par la relation $p^2 = p$, caractérisation des sous-espaces F et G comme image et noyau de la projection p, caractérisation de l'image comme $\ker(p - \mathrm{id})$
  - symétrie par rapport à un sous-espace F parallèlement à un sous-espace supplémentaire G, caractérisation des symétries par la relation $s^2 = \mathrm{id}$, caractérisation des sous-espaces F et G comme noyaux de $s - \mathrm{id}$ et de $s + \mathrm{id}$, relation $s = 2p - \mathrm{id}$ entre symétrie et projection ayant les mêmes éléments caractéristiques

Chapitre 19 : Matrices et algèbre linéaire.

- Matrice d'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension E dans une base de E.

- Matrice d'une application linéaire f entre espaces vectoriels de dimension finie dans une base $\mathcal{B}$ de l'espace de départ et dans une base $\mathcal{C}$ de l'espace d'arrivée. Cette matrice sera notée $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, ou plus simplement $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ dans le cas d'un endomorphisme. On pourra utiliser la notation *can* pour désigner la base canonique d'un espace usuel.
- Opérations basiques sur les matrices d'application linéaire : formule $Y = MX$ quand Y représente le vecteur-colonne des coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{C}$, et X le vecteur-colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$; NM est la matrice représentative de $g \circ f$ dans des bases cohérentes avec celles de la définition de M et de N, application à la caractérisation des symétries, des projecteurs et à la bijectivité d'une application linéaire.
- Formules de changements de bases :
  - définition de la matrice de passage entre deux bases d'un même espace vectoriel, inversibilité des matrices de passage
  - formule $X' = P^{-1}X$ pour le calcul des coordonnées d'un vecteur dans une nouvelle base
  - formule $M' = Q^{-1}MP$ pour le changement de bases pour la matrice d'un endomorphisme. En pratique, on n'utilisera pratiquement que le cas particulier $M' = P^{-1}MP$ pour les endomorphismes

Prévisions pour la semaine suivante : même programme, complété par les calculs de déterminants.