

Programme de colle n° 14

PTSI B Lycée Eiffel

semaine du 22/02 au 27/02 2021

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtimements corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 10 : Continuité.

- Limites de fonctions :
 - définition des différents types de limites (finies, infinies, quand x tend vers $\pm\infty$, quand x tend vers a)
 - composition de limites
 - caractérisation séquentielle de la limite (utilisée pour prouver que des fonctions du type $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admettent pas de limite en 0)
 - limites à gauche et à droite
 - existence de limites à gauche et à droite pour les fonctions monotones
- Définition de la continuité en un point et sur un intervalle, stabilité par les différentes opérations usuelles, continuité à droite et à gauche, prolongement par continuité d'une fonction admettant une limite finie en un point.
- Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences (théorème de la bijection, théorème du maximum, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle).
- Exemples d'étude de suites implicites. Aucun théorème spécifique à ce sujet, mais pour une suite définie par une condition du type $f_n(u_n) = 0$, on doit savoir :
 - majorer ou minorer la suite par un réel en calculant l'image de ce réel par f_n
 - étudier la monotonie de la suite en passant par le signe de $f_n(u_{n+1})$
 - passer l'équation de définition de la suite à la limite pour obtenir la limite de la suite implicite, en exploitant éventuellement un raisonnement par l'absurde
- Méthode de dichotomie pour la détermination d'une valeur approchée d'une solution d'équation de la forme $f(x) = 0$ quand f est continue.

Chapitre 11 : Dérivation, suites récurrentes.

- Dérivation, vocabulaire et formulaire :
 - taux d'accroissement $\tau_{a,f}$ d'une fonction f en a , interprétation graphique comme pente de la droite reliant les points de la courbe d'abscisses a et $a+h$, définition de $f'(a)$ comme limite du taux d'accroissement, fonction dérivable en a et dérivable sur un intervalle I
 - dérivée à gauche ou à droite en a (notées $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$), demi-tangentes à la courbe quand les deux valeurs sont distinctes, existence de tangentes verticales en cas de limite infinie du taux d'accroissement
 - équation de la tangente en a à la courbe représentative de f , développement limité à l'ordre 1 de f en a (écrit sous la forme $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$)
 - démonstration des diverses formules de dérivation (**somme, produit, inverse, quotient, composée, réciproque**)
 - dérivées successives d'une fonction, notation $f^{(n)}$, fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{D}^k$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle, formule de Leibniz pour la dérivée n -ème d'un produit
- Théorèmes faisant intervenir la dérivation :
 - si f est dérivable sur $[a, b]$ et admet un extremum en $x \in]a, b[$, alors $f'(x) = 0$
 - théorème de Rolle
 - théorème des accroissements finis (sa **démonstration** à l'aide du théorème de Rolle est à connaître)
 - application du TAF à l'étude des variations
 - théorème de prolongement de la dérivée (si f est dérivable sur $]a, b[$, continue en a et f' admet une limite l en a , alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$)
 - inégalité des accroissements finis (deux versions, une avec une hypothèse du type $m \leq f'(x) \leq M$ sur un intervalle I , une autre où on a une hypothèse de majoration de $|f'|$)
- Étude de suites récurrentes :
 - vocabulaire de base (suite récurrente, intervalle stable par une fonction f , point fixe d'une fonction)
 - la limite éventuelle d'une suite récurrente est un point fixe de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$
 - utilisation de l'IAF pour démontrer la convergence et éventuellement obtenir des informations sur la vitesse de convergence d'une suite récurrente (u_n) (aucune connaissance spécifique n'est exigée mais les élèves doivent connaître le fonctionnement global, et notamment savoir quand faire des récurrences)
- Extension des définitions vues dans les chapitres 10 et 11 aux suites et fonctions complexes :
 - limite d'une suite complexe, la suite (z_n) converge si et seulement si les suites réelles $\operatorname{Re}(z_n)$ et $\operatorname{Im}(z_n)$ convergent
 - limites de fonctions complexes (ici, fonction complexe désigne une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, avec $I \subset \mathbb{R}$), continuité et dérivation de fonctions complexes
 - aucun exercice spécifique n'a été fait sur ce sujet, on se ramènera de toute façon systématiquement à l'étude de suites ou de fonctions réelles

Prévisions pour la semaine suivante : dérivation (avec suites récurrentes), polynômes.