TD n^o 9 : révisions pour le DS 8

PTSI Lycée Eiffel

21 mai 2021

Exercice 1

On lance plusieurs fois de suite une pièce équilibrée à Pile ou Face. On note P_k l'événement « le k-ème lancer de pièce a donné Pile » et F_k l'événement « le k-ème lancer de pièce a donné Face ». On va chercher dans cet exercice à calculer les probabilités des événements suivants : A_k est réalisé si on tire **pour la première fois** deux Piles successifs aux lancers $k-1$ et k ; B_k est réalisé si on tire pour la première fois un Pile puis un Face aux lancers $k-1$ et k. Ainsi, si les cinq premiers lancers de pièce ont donné les résultats FPPFP, les événements A_3 et B_4 seront réalisés.

1. Déterminer (en justifiant vos calculs) les probabilités des événements A_2, A_3, B_2 et B_3.
2. Calculer la probabilité conditionnelle $P_{B_3}(A_2)$.
3. On suppose dans cette question que $k \geqslant 3$.
   (a) À quelle condition l'événement $P_1 \cap B_k$ est-il réalisé ?
   (b) Expliquer pourquoi $P(F_1 \cap B_k) = \dfrac{1}{2}P(B_{k-1})$.
   (c) Déduire rigoureusement des questions précédentes que $P(B_k) = \dfrac{1}{2}P(B_{k-1}) + \dfrac{1}{2^k}$.
   (d) En posant $u_k = 2^k P(B_k)$, déterminer une relation de récurrence vérifiée par les termes de la suite (u_n), en déduire la valeur de u_n puis celle de $P(B_k)$.
4. (a) Montrer que $(F_1, P_1 \cap P_2, P_1 \cap P_2)$ forment un système complet d'événements.
   (b) En déduire rigoureusement que, $\forall k \geqslant 4$, $P(A_k) = \dfrac{1}{2}P(A_{k-1}) + \dfrac{1}{4}P(A_{k-2})$.
   (c) Vérifier qu'en posant $P(A_0) = 1$ (même si ça n'a aucun sens !) et $P(A_1) = 0$, la relation précédente s'étend à $k = 2$ et à $k = 3$.
   (d) Calculer la valeur de $P(A_k)$ en fonction de k.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, N désigne un entier fixé, supérieur ou égal à 3. On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3 indiscernables. L'urne U_1 contient N boules blanches. L'urne U_2 contient une boule noire et $N-1$ boules blanches. L'urne U_3 contient deux boules noires et $N-2$ boules blanches.

1. On effectue tout d'abord des tirages sans remise dans l'urne U_3, jusqu'à tirer une boule noire, et on note X le nombre de tirages nécessaires pour tirer une boule noire.
   (a) Préciser ce que vaut $X(\Omega)$.
   (b) Dans le cas particulier où $N = 4$, donner la loi complète de X, ainsi que son espérance et sa variance.
   (c) Dans le cas particulier où $N = 5$, donner la loi complète de X, ainsi que son espérance et sa variance.
   (d) Dans le cas général, calculer $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.
   (e) Montrer qu'on a toujours $P(X = k) = \dfrac{2(N-k)}{N(N-1)}$.

(f) Calculer l'espérance de la variable X. Ce résultat vous semble-t-il logique ?

2. On choisit au hasard une urne entre les deux urnes U_1 et U_2 (probabilité $\frac{1}{2}$ pour chacune des deux urnes). On effectue ensuite dans cette urne (toujours la même donc) des tirages sans remise jusqu'à être certain de savoir quelle est l'urne dans laquelle on a fait ces tirages. On note Y le nombre de tirages nécessaires pour cela.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par Y ? Que vaudra nécessairement Y si on a choisi initialement de piocher dans l'urne U_1 ?
   (b) Montrer que $\forall k \in \{1, \dots, N-1\}$, $P(Y = k) = \frac{1}{2N}$.
   (c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y.
3. On choisit maintenant une urne au hasard parmi les trois urnes disponibles, puis on effectue dans cette urne des tirages sans remise jusqu'à savoir avec certitude dans quelle urne on a effectué les tirages. On note Z le nombre de tirages nécessaires pour cela. On suppose dans cette question que $N = 5$.
   (a) À quelle condition peut-on avoir $Z < 5$?
   (b) Déterminer la loi complète de la variable Z, puis calculer son espérance.

Exercice 3

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (3x - y + z, 2x + 2z, x - y + 3z)$.

1. Donner la matrice A de l'application f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer si la matrice A est inversible, et calculer le cas échéant son inverse A^{-1}. Que peut-on en déduire sur l'application f ?
3. Calculer A^2, et déterminer deux constantes a et b telles que $A^2 = aA + bI_3$.
4. En déduire une expression de f^{-1} en fonction de f et de id, vérifier la cohérence du résultat obtenu avec celui de la question 2.
5. Déterminer la dimension et une base de $\ker(f - 2\,id)$.
6. On pose $u = (1, 1, 1)$. Montrer qu'en complétant la base obtenue à la question précédente par le vecteur u, on obtient une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
7. Déterminer la matrice T de l'application f dans la base $\mathcal{B}$.
8. Donner la matrice P de la famille $\mathcal{B}$ dans la base canonique, et calculer son inverse P^{-1}.
9. Calculer le produit $P^{-1}AP$, et constater quelque chose de remarquable.

Exercice 4

On note dans cet exercice $E = \mathbb{R}^3$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ l'application définie par $f(x, y, z) = (2x - y + z, x + z, x - y + 2z)$.

1. Déterminer la matrice A représentant l'application f dans la base canonique de E.
2. Calculer A^2, puis déterminer une relation entre A^2, A et la matrice identité I. En déduire que f est un automorphisme, et donner une expression de sa réciproque f^{-1} de f en fonction de f et de id.
3. Déterminer la dimension et une base des espaces vectoriels $\ker(f - id)$ et $\ker(f - 2\,id)$.
4. Montrer que les deux sous-espaces étudiés à la question précédente sont supplémentaires dans E.
5. (a) Déterminer deux applications linéaires p et q telles que $p + q = id$ et $2p + q = f$ (on les exprimera en fonction de f et de id, pas besoin de donner une expression explicite).
   (b) Vérifier que p et q sont des projecteurs, et que $p \circ q = q \circ p = 0$.
6. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n = 2^n p + q$. Cette formule reste-t-elle valable pour $n = -1$?