TD n° 8 : révisions pour le DS 7

PTSI Lycée Eiffel

18 mars 2021

Exercice 1

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ les deux polynômes suivants (questions indépendantes) :

1. $P = X^4 + 4$
2. $Q = X^6 + 4X^5 + 4X^4 - 4X^3 - 11X^2 - 8X - 2$ (sachant que Q admet une racine évidente dont la multiplicité est assez élevée)
3. $P = X^3 + \alpha X^2 + \alpha X + 1$, où α est une constante réelle fixée (on distinguera des cas si besoin)

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx$.

1. Donner une primitive de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$, et en déduire la valeur de u_0.
2. À l'aide du changement de variables $t = \sqrt{1-x}$, calculer la valeur de u_1.
3. À l'aide d'une IPP, montrer que $u_n = \dfrac{2n}{3}(u_{n-1} - u_n)$ (on intégrera la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$ dans le calcul d'IPP). En déduire u_{n+1} en fonction de u_n, et préciser la valeur de u_2.
4. Déterminer la monotonie de la suite (u_n), puis prouver sa convergence, et enfin déterminer sa limite.
5. On pose $v_n = \dfrac{(2n+3)! \times u_n}{n!(n+1)!}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   (b) En déduire une expression explicite de v_n puis de u_n.

Exercice 3

Pour tout entier naturel n, on définit les polnynômes P_n et L_n par $P_n = (X^2-1)^n$, et $L_n = P_n^{(n)}$ (dérivée n-ème du polynôme P_n).

1. Calculer explicitement les polynômes P_n et L_n pour tous les entiers n inférieurs ou égaux à 3.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme L_n.

3. Que peut-on dire de la parité des polynômes L_n (on justifiera la réponse) ?
4. En appliquant la formule de Leibniz au produit $(X-1)^n \times (X+1)^n$, déterminer les valeurs de $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.
5. Prouver que, pour tout entier naturel n, on a $P'_{n+1} = 2(n+1)XP_n$.
6. Exprimer le polynôme P''_{n+1} en fonction de P_n et de P_{n-1}.
7. Exploiter les deux relations obtenues aux questions précédentes pour trouver une relation de récurrence reliant L_{n+2}, L_{n+1} et L_n.

Exercice 4

On définit pour tout entier naturel n l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x \, dx$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Déterminer plus généralement une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
3. Montrer que, pour tout entier n, on a $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{2^n}{n!}(e^2-1)$, et en déduire la convergence et la limite de la suite (I_n).
4. Montrer par récurrence que $e^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} + I_n$.
5. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}$.