TD n° 6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

21 janvier 2021

Exercice 1

1. Calculons donc : $v_0 = \dfrac{3}{2}$; $u_1 = \dfrac{2+\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{7}{4}$; $v_1 = \dfrac{12}{7}$; $u_2 = \dfrac{\frac{7}{4}+\frac{12}{7}}{2} = \dfrac{49+48}{56} = \dfrac{97}{56}$. Poussons même jusqu'à $v_2 = \dfrac{168}{97}$ puisqu'on nous en demande une valeur approchée. Pour l'obtenir, on pose tout bêtement la division euclidienne : $168 = 97 + 71$, puis $710 = 97 \times 7 + 31$, et $310 = 97 \times 3 + 19$, donc $v_2 \simeq 1.73$. C'est une valeur approchée par défaut, comme toujours quand on arrête une division euclidienne après quelques étapes.

2. On va prouver par une récurrence simultanée que u_n et v_n appartiennent à l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$. C'est bien entendu vérifié au rang 0 vu les valeurs calculées plus haut. Supposons donc que ce soit le cas au rang n, on a alors $3 \leqslant u_n + v_n \leqslant 4$ en additionnant simplement les encadrements, donc $\dfrac{3}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ comme souhaité. De plus, $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{u_{n+1}} \leqslant \dfrac{2}{3}$ (tout est positif, pas de problème pour passer à l'inverse en changeant le sens des inégalités), donc $\dfrac{3}{2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 2$, et notre propriété reste donc vérifiée au rang $n+1$, ce qui achève notre récurrence.

3. Calculons donc $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} - \dfrac{6}{u_n + v_n} = \dfrac{(u_n + v_n)^2 - 12}{2(u_n + v_n)}$. Or, par définition, $u_n v_n = 3$, donc $(u_n + v_n)^2 = (u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n = u_n^2 + v_n^2 - 2u_n v_n = (u_n - v_n)^2$, ce qui donne bien la formule demandée par l'énoncé. Comme numérateur et dénominateur de cette fraction sont tous deux positifs, on en déduit que $u_{n+1} - v_{n+1} \geqslant 0$, donc $u_{n+1} \geqslant v_{n+1}$, ce qui prouve l'inégalité $u_n \geqslant v_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$, le cas particulier $n = 0$ découlant des valeurs initiales calculées plus haut.

4. Calculons $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2}$. Cette expression est négative d'après la question précédente, donc (u_n) est décroissante. Puisque (u_n) est décroissante et positive, $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est croissante, et (v_n) également. Nos deux suites sont donc monotones et bornées (d'après la question 2), elles sont convergentes (mais on ne peut pas dire plus pour l'instant).

5. On sait que $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n - v_n}{2} \times \dfrac{u_n - v_n}{u_n + v_n}$. Or, les encadrements de la question 2 prouvent que $u_n + v_n \geqslant 3$, et que $u_n - v_n \leqslant \dfrac{1}{2}$, donc $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n - v_n}{12}$ (ce qui est encore mieux que ce que l'énoncé demandait).

6. On peut effectuer une petite récurrence : au rang 0, on sait que $u_0 - v_0 = 2 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2 \times 6^0}$, donc l'inégalité est en fait une égalité (et elle est donc vraie !). Supposons maintenant l'inégalité demandée vérifiée au rang n, alors d'après la question précédente (et l'hypothèse de récurrence) $u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{6}(u_n - v_n) \leqslant \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{2 \times 6^n} = \dfrac{1}{2 \times 6^{n+1}}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève donc la récurrence.

7. Comme $0 \leqslant u_n - v_n \leqslant \dfrac{1}{2 \times 6^n}$ (on a vu à la question 3 que $u_n - v_n \geqslant 0$, donc $u_n - v_n \geqslant 0$), et comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2 \times 6^n} = 0$ (suite géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$), le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$. Cette limite, combinée aux monotonies des deux suites, permet de dire que (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes. En particulier, elle ont une limite commune l. Comme par définition on a $u_n \times v_n = 3$, et que par ailleurs $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n v_n = l^2$ (par simple produit de limites), on en déduit que $l^2 = 3$, et donc $l = \sqrt{3}$ (les deux suites ayant clairement une limite positive).
8. On souhaite avoir $|u_n - l| \leqslant 10^{-10}$. Or, par adjacence des deux suites, on sait qu'on aura toujours $v_n \leqslant l \leqslant u_n$, et donc $|u_n - l| \leqslant u_n - v_n \leqslant \dfrac{1}{2 \times 6^n}$. Une condition suffisante (mais pas nécessaire, bien sûr) pour obtenir la valeur approchée souhaitée est donc que $\dfrac{1}{2 \times 6^n} \leqslant 10^{10}$, soit $6^n \geqslant \dfrac{10^{10}}{2}$, donc en passant au logarithme de base 6 (histoire de faire original), $n \geqslant \log_6(10^{10}) - \log_6(2)$ (valeur qui, pour les curieux, a une partie entière égale à 11. Il suffit donc de prendre $n = 12$ pour être certain d'avoir dix décimales correctes en prenant u_n comme approximation de $\sqrt{3}$. Si on se contente de $n = 4$, par le même raisonnement, on est certains d'avoir un écart inférieur à $\dfrac{1}{2 \times 6^4} = \dfrac{1}{2 \times 1\ 296} = \dfrac{1}{2\ 592}$. Cette valeur est comprise entre 10^{-3} et 10^{-4}, on aura donc au minimum trois décimales correctes.

Exercice 2

1. On calcule donc $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. On constate en passant que $M^2 = -M + 2I$ mais ce n'est pas ce qui est demandé. Passons donc à $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 18 & -17 & 18 \\ 9 & -9 & 10 \end{pmatrix}$. Cette fois-ci on obtient la relation $M^3 = 3M - 2I$ (on commence par constater que les coefficients hors de la diagonale sont tous multipliés par 3 lors du passage de M à M^3, puis on regarde ce qui se passe sur la diagonale pour obtenir le coefficient devant I dans la relation).
2. On peut donc écrire $3M - M^3 = 2I$, soit $M\left(\dfrac{3}{2}I - \dfrac{1}{2}M^2\right) = I$. La matrice M est donc inversible, d'inverse $\dfrac{3}{2}I - \dfrac{1}{2}M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.
3. Nous allons procéder par récurrence. Au rang 0, $M^0 = I$, qui est bien de la forme souhaitée en posant simplement $u_0 = 0$. Supposons maintenant la propriétée vérifiée pour M^n, et calculons alors $M^{n+1} = M^n \times M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1 - 2u_n & 2u_n \\ u_n & -u_n & 1 + u_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 - 4u_n & -5 + 4u_n & 6 - 4u_n \\ 3 - 2u_n & -3 + 2u_n & 4 - 2u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(3 - 2u_n) & 1 - 2(3 - 2u_n) & 2(3 - 2u_n) \\ 3 - 2u_n & -3 + 2u_n & 1 + (3 - 2u_n) \end{pmatrix}$, qui est bien de la forme souhaitée en posant $u_{n+1} = 3 - 2u_n$. La récurrence fonctionne donc, et la proriété est prouvée pour tout entier naturel n.
4. Puisqu'on a obtenu la relation de récurrence $u_{n+1} = 3 - 2u_n$, la suite (u_n) est arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = 3 - 2x$, qui a pour solution $x = -1$. On pose donc $v_n = u_n - 1$ et on constate que $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2 - 2u_n = -2v_n$. La suite (v_n) est donc

géométrique de raison -2 et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = -1$, donc $v_n = -(-2)^n$, puis $u_n = 1 + v_n = 1 - (-2)^n$. On en déduit que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2+(-2)^{n+1} & -1-(-2)^{n+1} & 2+(-2)^{n+1} \\ 1-(-2)^n & -1+(-2)^n & 2-(-2)^n \end{pmatrix}$.

5. Si on applique la formule précédente avec $n = -1$, donc $(-2)^n = -\frac{1}{2}$ et $(-2)^{n+1} = (-2)^0 = 1$, on trouve $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$, ce qui est bien la valeur de l'inverse calculée plus haut.

6. Pour une fois, effectuons directement le calcul matriciellement :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 6L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 5L_3 - 3L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftrightarrow L_2 - 3L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -15 & 10 & -15 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow -L_2/5 \\ L_2 \leftarrow L_3/2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

On retrouve bien sûr une fois de plus la même matrice inverse.

Exercice 3

1. On calcule donc $u_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2$, $v_1 = u_1 = 2$ et $w_1 = 0 + 1 = 1$.
Puis $u_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{5}{2}$, $v_2 + 2u_2 = 5$ et $w_2 = 0 + \frac{2}{2} + 2 \times 2 = 5$.
Enfin, $u_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} = \frac{8}{3}$, $v_3 = 6u_3 = 16$ et $w_3 = 0 + \frac{6}{3} + 2 \times \frac{6}{3} + 3 \times 6 = 24$.

2. En exploitant la symétrie des coefficients binomiaux $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, on se rend compte qu'en remplaçant k par $n-k$ dans la somme, les deux expressions sont effectivement égales (on se contente en fait d'effectuer la somme en sens inverse). On a donc, en développant, $w_n = \sum_{k=0}^{n} n \frac{n!}{\binom{n}{k}} - \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{\binom{n}{k}} = n \times n! u_n - w_n$, soit $2w_n = nv_n$ et donc $w_n = \frac{nv_n}{2}$.

3. On sait déjà que $w_n = \frac{n}{2} v_n = \frac{n \times n!}{2} u_n$. Effectuons par ailleurs un calcul astucieux : $w_n = \sum_{k=0}^{n} (k+1-1) \frac{n!}{\binom{n}{k}}$ (on applique une bonne vieille astuce belge). En séparant le facteur en

$k+1$ et -1, on trouve alors $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)n!}{\binom{n}{k}} - n!u_n$. Or, on peut écrire que $\dfrac{1}{k+1}\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!(k+1)!} = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{n+1}{k+1}$ (c'est une variante de la formule sans nom), donc $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)\times n!}{\binom{n+1}{k+1}} - n!u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{\binom{n+1}{k+1}} - n!u_n = (n+1)! \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} - n!u_n$. On reconnait presque dans la première somme la valeur de u_{n+1}, il ne manque que le terme numéro 0. Autrement dit, on a $w_n = (n+1)!(u_{n+1}-1) - n!u_n$, donc $\dfrac{nn!}{2}u_n = (n+1)!(u_{n+1}-1) - n!u_n$. On divise tout par $n!$: $\dfrac{n}{2}u_n = (n+1)(u_{n+1}-1) - u_n$, soit $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n}{n+1} + \dfrac{nu_n}{2n+2} = \dfrac{(n+2)u_n}{2n+2}$. C'est exactement la relation demandée.

4. On peut calculer $u_4 = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{1} = \dfrac{8}{3}$, et en déduire à l'aide de la relation précédente que $u_5 = 1 + \dfrac{6}{10}u_4 = 1 + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{8}{3} = 1 + \dfrac{8}{5} = \dfrac{13}{5}$. Ensuite, $u_6 = 1 + \dfrac{7}{12}u_5 = 1 + \dfrac{91}{60} = \dfrac{151}{60}$, et enfin $u_7 = 1 + \dfrac{8}{15}u_6 = 1 + \dfrac{4}{7} \times \dfrac{151}{60} = 1 + \dfrac{151}{105} = \dfrac{256}{105}$. Passionnant.

5. C'est un calcul tout bête exploitant la question 2 : $t_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}u_{n+1}}{n+2} = \dfrac{2^{n+1}}{n+2} + \dfrac{2^{n+1}}{n+2} \times \dfrac{n+2}{2n+2}u_n = \dfrac{2^{n+1}}{n+2} + \dfrac{2^{n+1}}{2(n+1)}u_n = \dfrac{2^{n+1}}{n+2} + \dfrac{2^n}{n+1}u_n = \dfrac{2^{n+1}}{n+2} + t_n$.

6. On procède par exemple par récurrence, en prouvant plus simplement que $t_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k+1}$. Au rang 0, le membre de droite de la relation vaut 1 (un seul terme dans la somme égal à 1), ce qui est bien la valeur de t_0. Supposons la relation vraie au rang n, alors $t_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{n+2} + t_n = \dfrac{2^{n+1}}{n+2} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{k+1}$, ce qui achève la récurrence.

Exercice 4

1. Utilisons la méthode du système en résolvant : $\begin{cases} x - y + z = a \\ 2x - y = b \\ -x + y + 2z = c \end{cases}$. On peut additionner les deux équations extrêmes pour obtenir immédiatement $3z = a + c$, soit $z = \dfrac{1}{3}a + \dfrac{1}{3}c$. Ensuite, on effectue par exemple l'opération $L_2 - L_1$ qui donne l'équation $x - z = b - a$, soit $x = z - a + b = -\dfrac{2}{3}a + b + \dfrac{1}{3}c$, et on reporte dans la deuxième équation du système initial : $y = 2x - b = -\dfrac{4}{3}a + b + \dfrac{2}{3}c$. Le système ayant toujours une solution unique, la matrice est inversible, et son inverse vaut $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Le plus simple est de commencer par calculer $AP = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice D est bien diagonale.

3. On va procéder par récurrence. Pour $n = 0$, on a bien $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} =$

$I_3 = A^0$. Supposons maintenant la formule vérifiée au rang n, et constatons que la définition $D = P^{-1}AP$ implique $A = PDP{-}1$ (en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}). On peut alors écrire $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

Il ne reste plus qu'à calculer le produit : $PD^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} (-1)^n & -2^n & 2^n \\ 2(-1)^n & -2^n & 0 \\ (-1)^{n+1} & 2^n & 2^{n+1} \end{pmatrix}$, puis $A^n = PD^nP^{-1} =$

$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\times(-1)^{n+1} + 5\times 2^n & 3\times(-1)^n - 3\times 2^n & (-1)^n - 2^n \\ 4\times(-1)^{n+1} + 2^{n+2} & 6\times(-1)^n - 3\times 2^n & 2\times(-1)^n - 2^{n+1} \\ 2\times(-1)^n - 2^{n+1} & 3\times(-1)^{n+1} + 3\times 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+2} \end{pmatrix}$.

4. En effectuant les opérations $L_1 - L_2$ et $L_1 + L_3$, on obtient les deux équations $x + z = 7$ et $3x + 3z = 21$, qui sont manifestement équivalentes. Le système n'est donc pas un système de Cramer, on peut simplement exprimer deux des variables en fonction de la troisième, par exemple $z = 7 - x$, puis en remplaçant dans la première équation initiale, $5x - 3y - 7 + x = 5$, donc $3y = 6x - 12$ et $y = 2x - 4$. On peut alors écrire $\mathcal{S} = \{(x, 2x-4, 7-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Comme le système n'est pas de Cramer, sa matrice, qui est justement la matrice $A + I_3$, n'est pas inversible.

5. Pour changer, calculons donc : $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = \begin{pmatrix} 14 & -9 & -3 \\ 12 & -10 & -6 \\ -6 & 9 & 11 \end{pmatrix}$. Les coefficients en-dehors de la diagonale étant identiques entre A et A^2, et ceux sur la diagonale étant augmentés de 2 quand on passe de A à A^2, on en déduit facilement que $A^2 = A + 2I$. On peut aussi remarquer si on a du temps à perdre que $A^3 = 3A + 2I$.

6. On par de l'égalité $A^2 = A+2I$ et on isole la matrice identité : $I = \frac{1}{2}(A^2 - A) = \frac{1}{2}A(A-I)$. On en déduit directement que la matrice A est inversible et que son inverse est $A^{-1} = \frac{1}{2}(A-I) =$ $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

7. C'est évidemment une récurrence classique : au rang 0, la propriété est vraie en posant simplement $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ (et également au rang 1 en posant $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$, même si ça ne sert pas pour la récurrence). Supposons désormais la propriété vraie au rang n, alors en exploitant la relation de la question 5 on peut écrire $A^{n+1} = A^n \times A = (a_nA + b_nI)A = a_nA^2 + b_nA = a_n(A + 2I) + b_nA = (a_n + b_n)A + 2a_nI$. La propriété est donc héréditaire, avec de plus les relations de récurrence $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$.

8. En décalant la relation de récurrence précédente, $a_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n$. La suite (a_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation carastéristique $x^2 - x - 2 = 0$. Cette équation admet pour racines évidentes $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$, on peut donc écrire a_n sous la forme $\lambda \times (-1)^n + \mu \times 2^n$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. En appliquant cette expression pour $n = 0$ et $n = 1$, on trouve les conditions $\lambda + \mu = 0$ et $-\lambda + 2\mu = 1$, donc $\lambda = -\mu$ et $3\mu = 1$, soit $\mu = \frac{1}{3}$ et $\lambda = -\frac{1}{3}$. Autrement dit, pour tout entier naturel n, $a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$, puis $b_n = 2a_{n-1} = \frac{2^n + 2\times(-1)^n}{3}$. Enfin, on conclut : $A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}A + \frac{2^n + 2\times(-1)^n}{3}I$. On peut écrire la matrice explicitement : $A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2\times(-1)^n + 5\times 2^n & 3\times(-1)^n - 3\times 2^n & (-1)^n - 2^n \\ -4\times(-1)^n + 2^{n+2} & 6\times(-1)^n - 3\times 2^n & 2\times(-1)^n - 2^{n+1} \\ 2\times(-1)^n - 2^{n+1} & -3\times(-1)^n + 3\times 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+2} \end{pmatrix}$.
C'est exactement la même matrice que celle obtenue à la question 3 (encore heureux !).

9. Inutile de s'embêter avec les coefficients, la formule générale en fonction de A et de I suffit : pour $n=-1$, on devrait avoir $a_{-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}$ et $b_{-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-2\right)=-\frac{1}{2}$. Autrement dit, on devrait avoir $A^{-1}=\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}I$, ce qui est bien le cas (cf question 6). La formule est donc valable pour $n=-1$.

10. On procède comme à la question précédente : $a_{-2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-1\right)=-\frac{1}{4}$ et $b_{-2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+2\right)=\frac{3}{4}$. On devrait donc avoir $A^{-2}=-\frac{1}{4}A+\frac{3}{4}I$. Or on sait que $A^2=A+2I$, et $(A+2I)\left(-\frac{1}{4}A+\frac{3}{4}I\right)=-\frac{1}{4}A^2-\frac{1}{2}A+\frac{3}{4}A+\frac{3}{2}I=-\frac{1}{4}A-\frac{1}{2}I+\frac{1}{4}A+\frac{3}{2}I=I$, ce qui prouve que la formule souhaitée correspond bien à l'inverse de A^2. La formule est donc toujours valable pour $n=-2$ (en fait elle le reste pour tout entier relatif).

11. On souhaite désormais calculer le **commutant** de la matrice A, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les matrices M vérifiant $AM=MA$.

   (a) En bourrinnant salement et en posant $N=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, la condition $DN=ND$ se traduit par $\begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a & 2b & 2c \\ -d & 2e & 2f \\ -g & 2h & 2i \end{pmatrix}$. Cinq des neuf équations ainsi obtenues (celles concernant a, e, f, h et i) sont manifestement vraies, alors que les quatre autres impliquent tout aussi trivialement la nullité du coefficient correspondant. On conclut donc que toutes les matrices de la forme $N=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix}$ commutent avec la matrice D.

   (b) C'est un calcul sans intérêt : $ND=DN \Leftrightarrow P^{-1}MPD=DP^{-1}MP \Leftrightarrow MPD=PDP{-}1MP \Leftrightarrow MPDP^{-1}=PDP^{-1}M \Leftrightarrow AM=MA$ puisque $A=PDP^{-1}$.

   (c) Comme $M=PNP^{-1}$, les question précédentes impliquent que les matrices commutant avec A sont de la forme $M=PNP^{-1}$, où N est de la forme obtenue plus haut, qu'on peut écrire $N=a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+h\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En notant $M_1=P\times\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\times P^{-1}$ et ainsi de suite, on aura bien la forme souhaitée par l'énoncé. Le calcul explicite des matrices M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5 a un intérêt à peu près nul. Donnons simplement $M_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.