TD n° 5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

10 décembre 2020

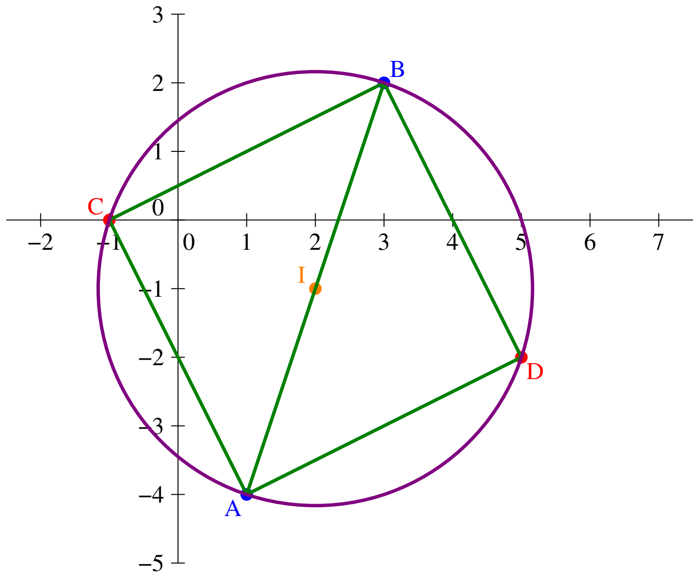
Exercice 1

1. L'équation du second degré proposée a pour discriminant $\Delta = (4-2i)^2 - 4(11-10i) = 16-16i-4-44+40i = -32+24i$. Ce n'est pas très sympathique, mais pas non plus si affreux que ça dans la mesure où $|\Delta| = \sqrt{32^2+24^2} = \sqrt{(4\times 8)^2+(3\times 8)^2} = 8\sqrt{16+9} = 8\times 5 = 40$. On pose de toute façon comme d'habitude $\delta = a+ib$ et on cherche les conditions pour lesquelles on aura $\delta^2 = \Delta$. On obtient les équations usuelles $a^2-b^2 = -32$ et $2ab = 24$, ainsi que l'équation sur le module $a^2+b^2 = |\delta|^2 = |\Delta| = 40$. En additionnant la première et la troisième équation obtenues, on trouve $2a^2 = 8$, donc $a^2 = 4$ et $a = \pm 2$, et en les soustrayant on a $2b^2 = 72$, soit $b^2 = 36$ et donc $b = \pm 6$. Comme a et b doivent être de même signe pour satisfaire la dernière équation $2ab = 24$, on gadera par exemple $\delta = 2+6i$. Les solutions de notre équation sont alors les deux nombres complexes $z_A = \dfrac{4-2i-2-6i}{2} = 1-4i$ et $z_B = \dfrac{4-2i+2+6i}{2} = 3+2i$.
2. Si le triangle ABC est isocèle rectange en C et que l'angle droit est direct (dans le sens de A vers B), cela signifie que d'une part $CA = CB$ et d'autre part $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui revient exactement à dire que $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = i$ (on peut d'ailleurs obtenir cette égalité encore plus directement en signalant que le point B est alors l'image du point A par la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$). On a donc $e_B - z_C = iz_A - iz_C$ ou encore $z_C = \dfrac{iz_A - z_B}{i-1}$, soit $z_C = \dfrac{i+4-3-2i}{i-1} = \dfrac{1-i}{i-1} = -1$.

   On calcule de même l'affixe du point D en partant cette fois de la condition $\dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_D} = -i$ (l'angle est orienté dans l'autre sens), ce qui donne $z_B - z_D = -iz_A + iz_D$, soit $z_D = \dfrac{z_B + iz_A}{1+i} = \dfrac{3+2i+i+4}{1+i} = \dfrac{(7+3i)(1-i)}{2} = 5-2i$.

   Par construction, les quatre côtés du quadrilatère $ABCD$ sont égaux (les deux triangles isocèles rectanges ABC et ABD ayant la même hypothénuse AB, leurs côtés de l'angle droit ont même longueur), donc il s'agit au moins d'un losange. De plus, ce losange a deux angles droits (en C et en D), ce qui suffit à en faire un carré (si vous n'êtes pas convaincu, vous prouvez qu'un des deux angles restants est droit, ce qui n'est pas compliqué non plus ; la figure est de toute façon consitué de deux demi-carrés identiques accolés). La figure est située après la réponse à la question 3.
3. En utilisant les caractérisations classiques des arguments complexes, le triangle ABM est rectangle en M si $\arg\left(\dfrac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$. En posant simplement $z_M = a+ib$, celà revient à dire que $\dfrac{a+ib-3-2i}{a+ib-1+4i} \in i\mathbb{R}$. Quitte à multiplier en haut et en bas par le conjugué du dénominateur et à oublier justement ce dénominateur (qui sera de toute façon réel positif),

on trouve l'équation $((a-3)+(b-2)i)((a-1)-(b+4)i) \in i\mathbb{R}$, soit en isolant la partie réelle qui doit s'annuler $(a-3)(a-1)+(b-2)(b+4)=0$. On développe joyeusement tout ça : $a^2-4a+b^2+2b-5=0$, soit $(a-2)^2+(b+1)^2=10$, et on reconnait l'équation d'un cercle de centre $I(2-i)$ et de rayon $\sqrt{10}$ (auquel il faut enlever les points A et B si on veut être rigoureux). Une figure contenant tous les éléments importants :



4. On constate que $z_I = \dfrac{z_A+z_B}{2}$, autrement dit que I n'est autre que le milieu du segment $[AB]$. De plus, on calcule aisément $AB = |z_A - z_B| = |-2-6i| = \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10}$, ce qui prouve que le cercle de la question précédente a pour diamètre AB. En fait, ce cercle est de fait **le** cercle de diamètre $[AB]$, ce qui est évidemment normal si on se souvient de ses cours de géomtétrie du collège : le triangle ABM est rectangle en M si et seulement si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ (comme quoi parfois les complexes ne servent au fond pas à grand chose).

Exercice 2

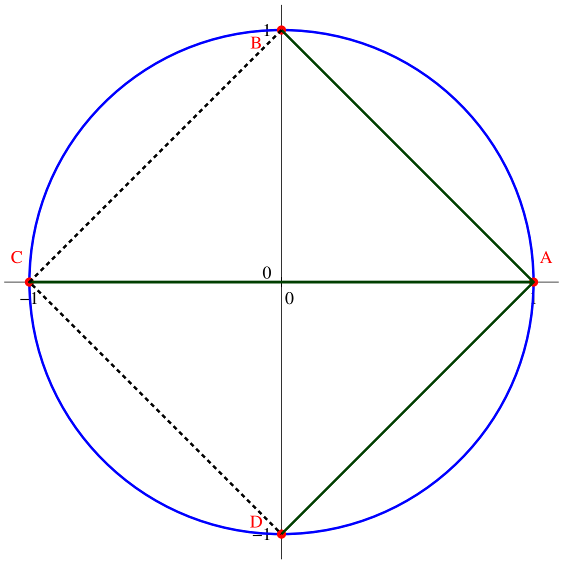
1. On espère que cette question sera réussie par tout le monde sans difficulté : pour $n=3$, $a = e^{i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; pour $n=4$, $a = e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; et pour $n=6$, $a = e^{i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$.
2. Dans ce cas, on a $a^0 = 1$; $a^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et $a^3 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc la somme demandée est égale à $1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1 + i(1+\sqrt{2})$. Calculons d'autre part $\dfrac{2}{1-a} = \dfrac{2}{1-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{4}{2-\sqrt{2}-i\sqrt{2}} = \dfrac{4(2-\sqrt{2}+i\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})^2+2} = \dfrac{4(2-\sqrt{2}+i\sqrt{2})}{8-4\sqrt{2}} = \dfrac{2-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$. Or, $\dfrac{1}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$, donc $\dfrac{2}{1-a} = \dfrac{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2}) + i\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{2} = 1 + i(\sqrt{2}+1)$, ce qui est bien la valeur obtenue plus haut.
3. On peut bien sûr effectuer le calcul beaucoup plus rapidement en exploitant une somme géométrique : $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \dfrac{1-a^n}{1-a}$. Or $a^n = e^{i\pi} = -1$, et la formule en découle trivialement.
4. Puisque $a^k = e^{i\frac{k\pi}{n}} = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$, les deux sommes qu'on cherche à calculer

dans cette question sont tout simplement la partie réelle et la partie imaginaire de la somme calculée à la question précédente. Tentons donc d'écrire le nombre A sous forme algébrique : $A = \dfrac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} = \dfrac{2}{e^{i\frac{\pi}{2n}}(e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}})} = \dfrac{2}{-2ie^{i\frac{\pi}{2n}}\sin(\frac{\pi}{2n})} = \dfrac{ie^{-i\frac{\pi}{2n}}}{\sin(\frac{\pi}{2n})} = 1 + \dfrac{i}{\tan(\frac{\pi}{2n})}$ en exploitant une factorisation par l'angle moitié au dénominateur (et la parité des fonctions cos et sin dans la toute dernière étape de calcul). On en déduit donc que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2n})}$.

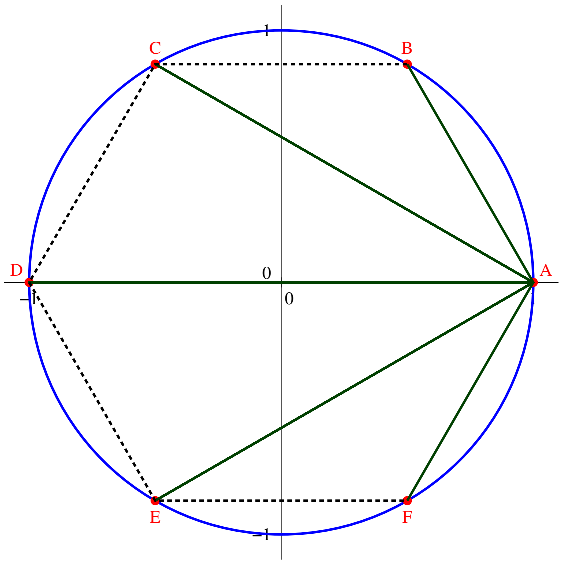
5. Il suffit de s'appuyer sur le fait que $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, et donc que $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) = \cos\left(\dfrac{(n-k)\pi}{n}\right)$. Autrement dit, dans la somme des cosinus calculée à la question précédente, le terme numéro 1 s'annule avec le terme numéro $n-1$, le terme numéro 2 avec le terme numéro $n-2$ etc. Les seuls termes ne s'annulant pas sont le terme correspondant à $k = 0$, qui vaut $\cos(0) = 1$, et éventuellement (si n est un entier pair), le terme correspondant à $k = \dfrac{n}{2}$ (puisque dans ce cas $k = n - k$) mais on peut oublier ce terme puisqu'alors $\cos\left(\dfrac{n\pi}{2n}\right) = 0$. Il ne reste donc que 1 comme valeur de la somme, ce qui correspond bien au résultat obtenu précédemment.

6. Cette question n'a en fait pas grand chose à voir avec le reste de l'exercice (le rapport serait plus évident **sans** le carré dans la somme, on pourrait alors utiliser une factorisation par l'angle moitié pour se ramener à l'une des sommes calculées auparavant). Du coup, contentons-nous d'écrire que $a^{2k} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, et que $|a^{2k} - 1|^2 = (a^{2k} - 1)(\overline{a^{2k}} - 1) = (a^{2k} - 1)(a^{-2k} - 1) = 2 - (a^{2k} + a^{-2k}) = 2 - 2\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$. Or, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = 0$ (on sait d'après le cours que la somme de toutes les racines n-èmes de l'unité est nulle, c'est exactement ce qu'on calcule ici). Il ne reste donc plus que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}|a^{2k} - 1|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} 2 = 2n$.

   Les nombres a^{2k} représentant exactement les racines n-èmes de lunité lorsque k varie entre 0 et $n-1$, on a donc prouvé que la somme des carrés des distances de ces racines à 1 est égale à $2n$. Comme 1 est elle-même une racine n-ème de l'unité, on a en fait prouvé que, dans le polygone régulier représentant ces racines dans le plan complexe, la somme des carrés des distances de tous les sommets à un sommet fixé vaut toujours $2n$. Par exemple, pour $n = 4$, on sait que le polygone obtenu est un carré dont la longueur de la diagonale vaut 2, donc de côté $\sqrt{2}$ (si on préfère, le côté du carré est la distance entre 1 et i, qui vaut bien $\sqrt{2}$). Dans ce carré, la somme des carrés des distances des sommets à un sommet donné vaut deux fois le carré d'un côté, plus le carré d'une diagonale, donc $2 \times 2 + 4 = 8$, ce qui correspond bien à la valeur $2n$ calculée dans l'exercice. Dans l'illustration qui suit, on a $AB^2 + AC^2 + AD^2 = 8$:



Pour $n = 6$ on est dans un hexagone de « grande diagonale » de longueur 2, et la somme des carrés des distances des sommets à un sommet fixé vaut 12 (là aussi, le calcul se fait très bien à la main si on est un peu motivé). Dans la figure ci-dessous, on a donc $AB^2 + AC^2 + AD^2 + AE^2 + AF^2 = 12$:



Exercice 3

1. IL faut donc choisir treize cartes parmi les 52 du jeu (l'ordre n'a aucune importance, et les répétitions sont bien sûr interdites), soit $\binom{52}{13}$ possibilités.
2. Une fois les quatre As imposés, il reste neuf cartes à choisir, et 48 cartes disponibles dans le jeu puisqu'on a déjà retiré les quatre As, soit $\binom{48}{9} = 1\ 677\ 106\ 640$ (les nombres ne sont évidemment donnés qu'à titre indicatif et n'étaient pas demandés le jour du devoir ; pour information, le nombre calculé à cette question représente une proportion $\frac{11}{4\ 165}$ du nombre total de mains possibles, ce qui signifie qu'on aura les quatre une fois toutes les 379 donnes environ).

3. Il ne faut pas oublier de choisir quels sont les deux As tirés parmi les quatre possibles, puis il reste onze cartes à choisir parmi les 48 qui ne sont pas des As, soit $\binom{4}{2} \times \binom{48}{11} =$ 135 571 202 208 mains possibles (un peu moins d'une fois sur cinq).
4. Pour chaque valeur, il faut choisir la couleur de la carte, autrement dit une carte parmi les quatre ayant cette valeur. Comme on répète l'opération treize fois de suite, cela donne $4^{13} = 67\ 108\ 864$ possibilités (c'est extrêmement improbable, encore nettement plus que d'avoir les quatre As).
5. Il y a au total 20 honneurs, et 32 cartes qui ne sont pas des honneurs, ce qui par le même raisonnement qu'aux premières questions donne $\binom{20}{5} \times \binom{32}{8} = 163\ 075\ 723\ 200$ mains possibles (un peu plus d'une main sur quatre, le nombre 5 est le nombre d'honneurs le plus probable parmi les mains tirées au hasard, ce qui est logique puisque $\frac{5}{13}$ des cartes du jeu sont des honneurs).
6. Un classique qui force à distinguer deux cas :
   - on tire l'As de pique, un deuxième As parmi les trois qui ne sont pas l'As de pique, quatre autres piques (parmi les douze piques restants une fois l'As isolé) et enfin sept cartes (pour compléter la main) parmi les 36 cartes qui ne sont pas des piques ni des As (douze cartes dans chacune des trois couleurs restantes). Le nombre de cas correspondants vaut $\binom{3}{1} \times \binom{12}{4}\binom{36}{7}$.
   - on ne tire pas l'As de pique, il faut alors choisir deux As parmi les trois restants, cinq piques parmi les douze restants, et six cartes parmi les 36 qui ne sont ni piques ni As, soit $\binom{3}{2} \times \binom{12}{5} \times \binom{36}{6}$ possibilités.

   Au total, $\binom{3}{1} \times \binom{12}{4}\binom{36}{7} + \binom{3}{2} \times \binom{12}{5}\binom{36}{6} = 21\ 652\ 212\ 384$ (à peu près un trentième du nombre total de mains).
7. Il faut choisir quelle couleur aura quatre cartes, puis choisir les quatre cartes parmi les treize de cette couleur, et choisir de même trois cartes parmi treize pour chacune des couleurs restantes, soit $\binom{4}{1} \times \binom{13}{4} \times \binom{13}{3}^3 = 66\ 905\ 856\ 160$ (un peu plus de 10% de la totalité des mains ; la répartition la plus probable des cartes dans les quatre couleurs est 4432).
8. Même principe, mais il faut choisir la couleur de cinq cartes et celle de deux cartes, soit $\binom{1}{4} \times \binom{3}{1} \times \binom{13}{5} \times \binom{13}{3}^2 \times \binom{13}{2} = 98\ 534\ 079\ 072$ mains possibles.
9. (a) On commence bien sûr par choisir les deux couleurs dans lesquelles on n'aura pas de cartes (où celles dans lesquelles on n'aura des cartes, au choix). Ensuite, attention, on ne peut pas se contenter de choisir $\binom{26}{13}$ cartes parmi celles qui restent, car il faut éviter les cas (certes très marginaux) où on aurait une troisième chicane ! Autrement dit, il faut supprimer deux cas seulement, celui où toutes les cartes sont la première des deux couleurs restantes, et celui où toutes les cartes sont dans la deuxième. Ce qui fait finalement $\binom{4}{2} \times \left(\binom{26}{13} - 2\right) = 62\ 403\ 588$ mains possibles avec exactement deux chicanes (c'est évidemment très peu probable).

   (b) Rappelons donc : si A, B, C et D sont quatre sous-ensemble finis d'un même ensemble, alors $|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|$.

   (c) Le but est bien sûr d'utiliser la formule de Poincaré. Notons A l'ensemble constitué de toutes les mains ayant une chicane à pique (elles ont le droit d'avoir d'autres chicanes ailleurs), B les mains ayant une chicane coeur, C les mains ayant une chicane carreau et D les mains ayant une chicane trèfle. Le nombre de main ayant au moins une chicane correspond exactement à $|A \cup B \cup C \cup D|$. Or, $|A| = \binom{39}{13}$ (il faut choisir les treize cartes de la main parmi les 39 restantes après avoir enlevé tous les piques), et de même pour les cardinaux de B, C et D. Ensuite, on calcule de même $|A \cap B| = \binom{26}{13}$ (contrairement à la question $9.a$, il n'est pas ici interdit d'avoir une troisième chicane) et de même pour chacune des autres intersections deux à deux. Encore plus facilement, $|A \cap B \cap C| = 1$ (on a forcément trezize trèfles), de même pour les autres intersections trois à trois. Et enfin $|A \cap B \cap C \cap D| = 0$ (il faut bien qu'on ait des cartes quelque part !). Finalement, en appliquant la formule du crible, $|A \cup B \cup C \cup D| = 4 \times \binom{39}{13} - 6 \times \binom{26}{13} + 4 = 32\,427\,298\,180$, soit quand même un peu plus de 5% du nombre total de mains possibles !