TD n^o 3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

8 octobre 2020

Exercice 1

1. On peut utiliser une formule de transformation somme-produit sur les deux termes extrêmes pour obtenir $\cos(4x) + \cos(14x) = 2\cos(9x)\cos(5x)$, et donc réécrire notre équation sous la forme $\cos(9x)(2\cos(5x) + 1) = 0$. L'équation est donc vérifiée si $\cos(9x) = 0$, soit $9x \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, ou encore $x \equiv \dfrac{\pi}{18}\left[\dfrac{\pi}{9}\right]$; ou si $\cos(5x) = -\dfrac{1}{2}$, soit $5x = \pm\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$, donc $x \equiv \dfrac{2\pi}{15}\left[\dfrac{2\pi}{5}\right]$ ou $x \equiv -\dfrac{2\pi}{15}\left[\dfrac{2\pi}{5}\right]$. Inutile d'essayer de regrouper ces solutions sous une forme simple, ça ne fonctionnera pas.
2. Il s'agit donc de résoudre l'équation $e^x + e^{-x} = 4$, ou encore $e^{2x} + 1 = 4e^x$ (la multiplication par e^x qui ne peut jamais s'annuler transforme l'équation en une équation équivalente). On pose $X = e^x$ pour sa ramener à l'équation du second degré $X^2 - 4X + 1$, qui a pour discriminant $\Delta = 16 - 4 = 12$, et admet deux racines réelles $X_1 = \dfrac{4 - \sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3}$, et $X_2 = \dfrac{4 + \sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3}$. Ces deux valeurs étant strictement positives (car $\sqrt{3} < 2$), l'équation initiale a donc deux solutions : $x = \ln(2 - \sqrt{3})$ et $x = \ln(2 + \sqrt{3})$. En fait, la connaissances des variations et de la parité de la fonction ch permettait d'anticiper avant même de commencer la résolution de l'équation que celle-ci aurait deux solutions opposées l'une de l'autre. On peut le vérifier : $\dfrac{1}{2 + \sqrt{3}} = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{2^2 - 3} = 2 - \sqrt{3}$, donc $\ln(2 - \sqrt{3}) = \ln\left(\dfrac{1}{2 + \sqrt{3}}\right) = -\ln(2 + \sqrt{3})$.
3. Plusieurs méthodes possibles, mais la plus simple consiste à utiliser directement les formules de duplication et de triplication du sinus : $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = \sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) + 3\sin(x) - 4\sin^3(x) = \sin(x)(4 + 2\cos(x) - 4\sin^2(x)) = \sin(x)(2\cos(x) + 4\cos^2(x))$ en appliquant simplement pour la dernière étape $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$. L'équation de départ est donc vérifiée si $\sin(x) = 0$ ou $\cos(x) = 0$ ou $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$. Les deux conditions peuvent être regroupées, elle sont vérifiées si $x \equiv 0\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$. La dernière condition donne les solutions supplémentaires $x \equiv \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$ et $x \equiv -\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$.
4. Notons pour simplifier le calcul $\theta = \arcsin\left(\dfrac{1}{3}\right)$ (θ est donc un angle compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$). On cherche donc à calculer $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, que nous noterons (là aussi pour simplifer) α. Les formules de duplications nous assurent que $\cos(\theta) = 1 - 2\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = 1 - 2\alpha^2$. Utilisons enfin la relation classique $1 - \cos^2(\theta) = \sin^2(\theta)$ pour en déduire que $1 - (1 - 2\alpha^2)^2 = \sin^2(\theta) = \dfrac{1}{9}$ (puisque, par définition de θ, $\sin(\theta) = \dfrac{1}{3}$). On a donc $(1 - 2\alpha^2)^2 = \cos^2(\theta) = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$. Or, $\cos(\theta) > 0$ puisque $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos(\theta) = \sqrt{\dfrac{8}{9}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. On en déduit maintenant

que $2\alpha^2 = 1 - \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{3}$, et comme α est lui aussi positif en tant que sinus d'un angle compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{4}$, on a enfin $\alpha = \sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{6}}$. On peut chercher à simplifier un peu l'écriture de ce nombre, mais ça n'a pas grand intérêt.

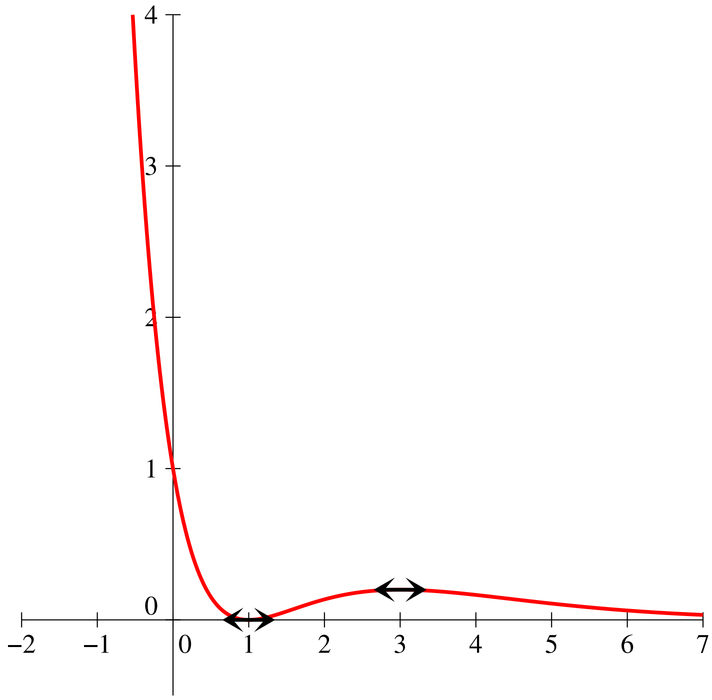
5. On peut déjà commencer par remarquer que $\cos\left(\dfrac{12\pi}{9}\right) = \cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$. Pour ceux qui restent, on ne connait bien sûr pas les valeurs, tentons une transformation somme-produit sur deux des trois termes (peu importe lesquels) : $\cos\left(\dfrac{2\pi}{9}\right) + \cos\left(\dfrac{4\pi}{9}\right) = 2\cos\left(\dfrac{3\pi}{9}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$. Ça tombe vraiment fort bien puisqu'à côté de ça il nous reste un $\cos\left(\dfrac{8\pi}{9}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{9}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$. Les trois premiers termes de la somme s'annulent donc et la valeur cherchée est simplement $-\dfrac{1}{2}$.

Exercice 2

1. (a) La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = 2(x-1)e^{-x} - (x-1)^2e^{-x} = (x-1)e^{-x}(2-(x-1)) = (x-1)(3-x)e^{-x}$. Le signe de cette dérivée est celui du trinôme $(x-1)(3-x)$, qui est négatif à l'extérieur de ses racines. On calcule en passant $g(1) = 0$ et $g(3) = \dfrac{4}{e^3}$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée de ce côté). Enfin, $g(x) = x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + e^{-x}$, et chacun des termes de cette somme a une limite nulle en $+\infty$ (par croissance comparée classique pour les deux premiers), donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^3}$	$\searrow$	0

(b) En utilisant la valeur de l'énoncé, $g(3) \simeq \dfrac{1}{5}$. Par ailleurs, $g(0) = 1$, ce qui permet de préciser un peu l'allure de la courbe.



(c) Commençons par préciser que g est continue donc bijective sur chacun des trois intervalles où elle est monotone : elle effectue une bijection de $]-\infty, 1]$ vers $[0, +\infty[$; puis de $]1, 3[$ vers $\left]0, \dfrac{4}{e^3}\right[$; et enfin de $[3, +\infty[$ vers $\left]0, \dfrac{4}{e^3}\right]$ (remarquez que j'ai bien fait exprès de prendre des intervalles disjoints au niveau de l'axe des abscisses). Distinguons maintenant nos cas :

- si $a < 0$, l'équation $g(x) = a$ ne peut pas avoir de solution puisque g ne prend que des valeurs positives.
- si $a = 0$, l'équation admet une seule solution $x = 1$ puisque 0 appartient à un seul des trois intervalles images définis ci-dessus.
- si $a \in \left], \dfrac{4}{e^3}\right[$, l'équation admet trois solutions, une sur chacun des intervalles définis ci-dessus.
- si $a = \dfrac{4}{e^3}$, l'équation admet deux solutions : $x = 3$ et une autre solution appartenant à l'intervalle $]-\infty, 1]$.
- si $a > \dfrac{4}{e^3}$, l'équation admet une seule solution, dans l'intervalle $]-\infty, 1]$ puisque a n'est dans aucun des deux autres intervalles images.

2. Un calcul très simlaire à celui de la limite de g en $+\infty$ (à coup de croissance comparée) permet d'affirmer que $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x^2 + 1)e^{-x} = 0$ (quelle que soit la valeur de k). On a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) - x = 0$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à toutes les courbes $\mathcal{C}_k$ en $+\infty$.

3. On calcule donc $f_k'(x) = 1 + 2kxe^{-x} - k(x^2+1)e^{-x} = 1 - ke^{-x}(x^2 - 2x + 1) = 1 - k(x-1)^2e^{-x} = 1 - kg(x)$. L'équation $f_k'(x) = 0$ est donc équivalente à $g(x) = \dfrac{1}{k}$ (dans le cas où $k = 0$, $f_0(x) = x$ et il ne peut bien sûr pas y avoir de tangente horizontale). D'après les résultats de la question 1.c :

   - si $k < 0$, $\dfrac{1}{k}$ est aussi strictement négatif, et l'équation n'a pas de solution, il n'y a donc pas de tangente horizontale à $\mathcal{C}_k$.
   - si $k = \dfrac{e^3}{4}$, alors il y a exactement deux tangentes horizontales.

- si $0 < k < \frac{e^3}{4}$, alors $\frac{1}{k} > \frac{4}{e^3}$ et il y a une tangente horizontale.
- si $k > \frac{e^3}{4}$, alors $0 < \frac{1}{k} < \frac{4}{e^3}$, et il y aura trois tangentes horizontales.

4. Les points en question ont des coordonnées de la forme $(x, f_k(x))$, avec par ailleurs $f_k'(x) = 0$, donc $g_k(x) = \frac{1}{k}$. Autrement dit, on doit avoir $y = x + k(x^2+1)e^{-x}$, et en même temps $(x-1)^2 e^{-x} = \frac{1}{k}$. De la deuxième équation, on déduit que $e^{-x} = \frac{1}{k(x-1)^2}$ (la valeur $x = 1$ ne peut jamais annuler f_k'), donc en remplaçant dans la première équation $y = x + \frac{x^2+1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-1)^2 + x^2 + 1}{(x-1)^2}$, ce qui est bien de la forme $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ demandée. Personne n'a fait cette question, mais en fait elle était facile (et rapportait des points, tant pis pour vous !).
5. On remarque que, quelle que soit la valeur de k, $f_k'(1) = 1$, donc toutes ces tangentes ont un même coefficient directeur et son parallèles (mais pas confondues car $f_k(1)$, lui, dépend de k).
6. (a) Calculons donc $f_k'(2) = 1 - ke^{-2}$, et $f_k(2) = 2 + 5ke^{-2}$. On peut alors donner l'équation de la tangente $T_k : y = \left(1 - \frac{k}{e^2}\right)(x-2) + 2 + 5\frac{k}{e^2} = \left(1 - \frac{k}{e^2}\right)x + 7\frac{k}{e^2}$.

   (b) Les droites sont concourantes s'il existe une valeur de x pour laquelle la valeur de y donnée par l'équation de la question précédente est indépendante de k. Il suffit pour celà de prendre $x = 7$ pour éliminer les termes en $\frac{k}{e^2}$ et trouver $y = 7$. Toutes les tangentes T_k passent donc par le point de coordonnées $(7, 7)$. On peut aussi retrouver ce résultat en déterminant l'intersection de deux de ces droites puis en vérifiant que le point appartient aussi à toutes les autres.

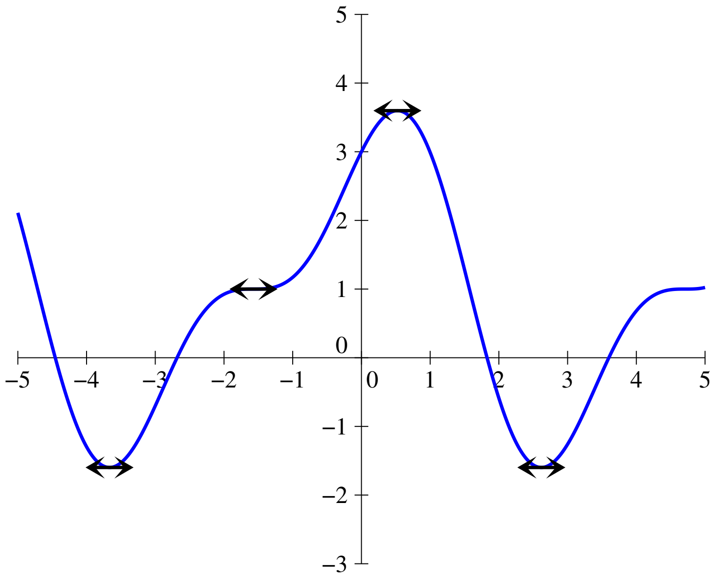
Exercice 3

1. La fonction f est 2π-périodique car cos l'est, et que $x \mapsto \sin(2x)$ est quand à elle π-périodique. Par contre, f n'est ni paire ni impaire : par exemple, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, qui n'est ni égal ni opposé à $2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. On étudiera donc f sur une période complète, par exemple sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
2. On a déjà fait le premier calcul à la question précédente. Ensuite, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 1 + \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, et enfin $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
3. Il s'agit donc de résoudre l'équation $\sin(2x) + 2\cos(x) = 0$, soit $2\sin(x)\cos(x) + 2\cos(x) = 0$ en exploitant la formule de duplication du sinus. On doit donc avoir $\cos(x) = 0$ ou $\sin(x) = -1$, mais cette deuxième condition implique la première, les seules solutions sont donc les réels de la forme $x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.
4. La fonction est dérivable sur $[-\pi, \pi]$, de dérivée $f' : x \mapsto 2\cos(2x) - 2\sin(x) = 2(1 - 2\sin^2(x) - \sin(x))$. Posons donc $X = \sin(x)$ et étudions le signe du trinôme $-2X^2 - X + 1$, qui admet pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, et pour racines $X_1 = \frac{1-3}{-4} = \frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{1+3}{-4} = -1$. La dérivée s'annule donc (dans notre intervalle d'étude) pour $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{5\pi}{6}$. Elle est par ailleurs positive quand $\sin(x) \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$, donc (toujours sur notre intervalle d'étude) lorsque $x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right]$ et lorsque $x \in \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ (en particulier, la dérivée s'annule

en $-\dfrac{\pi}{2}$ mais sans y changer de signe !). Pour compléter le tableau de variations, calculons $f(-\pi) = f(\pi) = 1 - 2 = -1$ et $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = 1 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. On a déjà calculé à la question 2 la valeur de $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$, et on sait depuis la question 3 que $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

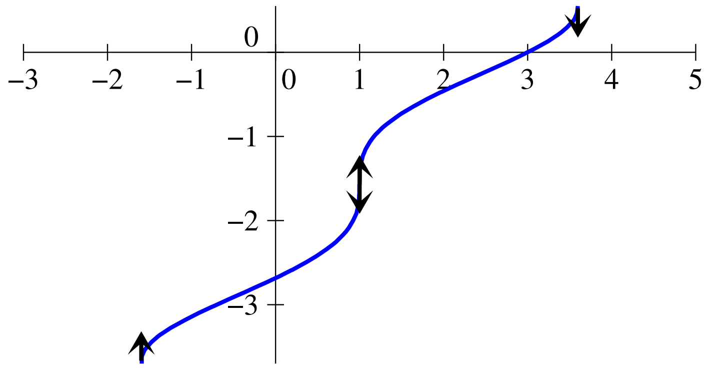
x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-1	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$1+\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$1-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	-1

5. Rappelons simplement que $\sqrt{3} \simeq 1.7$, donc $\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \simeq 2.5$. On peut bien sûr essayer de placer correctement les nombreuses valeurs calculées au cours de l'exercice :



6. Il faut donc trouver un intervalle sur lequel la fonction f est monotone. Le plus large disponible est (par exemple) $\left[-\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right]$ sur lequel f est croissante (cet intervalle représente deux tiers d'une période, f est décroissante sur le tiers restant). L'intervalle image est simplement $\left[1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}, 1 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right]$ vu les valeurs calculées plus haut.

7. La réciproque sera bijective et croissante de $\left[1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}, 1 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right]$ vers $\left[-\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right]$, avec des tangentes verticales partout où la courbe de f admettait des tangentes horizontales, c'est-à-dire en $1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, en $1 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (les deux extrémités de l'intervalle de définition) et en -1 (valeur qui a pour image $\dfrac{-\pi}{2}$ par la réciproque).



Exercice 4

1. Commençons par rappeler que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos(\arctan(x)$ est toujours positif. De plus, on sait que $1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, donc $\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$. La remarque initiale sur la positivité de $\cos(\arctan(x))$ permet alors de conclure que $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
   Ensuite c'est simple : $\sin(\arctan(x)) = \tan(\arctan(x)) \times \cos(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. Plein de méthodes possibles, la plus simple consistant à poser $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ (et aussi sur $]-\infty, 0[$, mais ça ne nous intéressera pas pour cette question), et $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$. La fonction f est donc constante sur tout l'intervalle $]0, +\infty[$. De plus, $f(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$, donc cette constante est égale à $\frac{\pi}{2}$. On a bien prouvé que, $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

3. Le calcul de dérivée ne pose aucun problème : $f'(x) = \arctan(x) + \frac{x}{1+x^2}$. En notant G une primitive de $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$, on aura donc $x\arctan(x) - G(x)$ qui est l'expression d'une primitive de arctan (puisque les termes en $\frac{x}{1+x^2}$ se simplifieront en dérivant pour ne laisser que l'arctangente). Or, on connait une telle fonction $G : x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ convient. Une primitive d'arctangente est donc la fonction $x \mapsto x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
   On en déduit que $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \arctan(t)\, dt = \left[x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{\pi}{4} - \ln(\sqrt{\pi^2+16}) + 2\ln(2)$. On n'obtiendra rien de mieux.

4. (a) La fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$, le seul problème peut venir de l'annulation du dénominateur $1-ax$. On en déduit directement que $\mathcal{D}_{f_a} = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{a}\right\}$. La fonction f_a est dérivable sur chacun de ses deux intervalles de définition. En posant $g(x) = \frac{a+x}{1-ax}$,

on a $g'(x) = \dfrac{1-ax+a^2+ax}{(1-ax)^2} = \dfrac{1+a^2}{(1-ax)^2}$, puis $f_a'(x) = \dfrac{1+a^2}{(1-ax)^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{(a+x)^2}{(1-ax)^2}} = \dfrac{1+a^2}{(1-ax)^2+(a+x)^2} = \dfrac{1+a^2}{1-2ax+a^2x^2+a^2+2ax+x^2} = \dfrac{1+a^2}{1+a^2+x^2+a^2x^2}$
$= \dfrac{1+a^2}{(1+a^2)(1+x^2)} = \dfrac{1}{1+x^2}$, comme demandé.

(b) D'après la question précédente, la fonction f_a a la même dérivée sur chacun de ses intervalles de définition que la fonction arctangente. Ainsi, il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que, $\forall x \in \left]-\infty, \dfrac{1}{a}\right[$, $f_a(x) = \arctan(x) + K$. Comme 0 appartient à cet intervalle (puisque a est supposé strictement positif), on doit en particulier avoir $f_a(0) = K$, soit $K = \arctan(a)$. On en déduit que $f_a(x) = \arctan\left(\dfrac{a+x}{1-ax}\right) = \arctan(a) + \arctan(x)$. Si $b > 0$ et $ab < 1$, celà signifie que $b \in \left]0, \dfrac{1}{a}\right[$, on peut donc lui appliquer l'égalité précédente et trouver exactement la relation $\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)$.

(c) Deux rédactions possibles pour cette question :

- cette fois-ci, en supposant $ab > 1$, on a $b \in \left]\dfrac{1}{a}, +\infty\right[$. Or, de façon similaire à la question précédente, sur tout cet intervalle $\left]\dfrac{1}{a}, +\infty\right[$, on a $f_a(b) = \arctan(b) + L$, pour une certaine constante $L \in \mathbb{R}$. Le plus simple pour obtenir la valeur de L est de regarder la limite quand b tend vers $+\infty$: on a alors $\lim\limits_{b \to +\infty} \arctan(b) = \dfrac{\pi}{2}$, et $\lim\limits_{b \to +\infty} \dfrac{a+b}{1-ab} = -\dfrac{1}{a}$ (quotient des termes de plus haut degré), donc $\lim\limits_{b \to +\infty} f_a(b) = \arctan\left(-\dfrac{1}{a}\right) = -\arctan\left(\dfrac{1}{a}\right) = \arctan(a) - \dfrac{\pi}{2}$ en utilisant l'imparité d'arctangente puis la relation démontrée à la question 2. Finalement, on obtient la condition $\arctan(a) - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} + L$, soit $L = \arctan(a) - \pi$. Finalement, la relation (B) s'écrit $\arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right) + \pi = \arctan(a) + \arctan(b)$.
- autre possibilité, on constate que $\dfrac{1}{a}$ et $\dfrac{1}{b}$ sont strictement positifs et vérifient $\dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{b} < 1$ (puisque l'inverse ab de ce produit est strictement supérieur à 1), donc on peut leur appliquer la relation (A), en constatant que $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{1-\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}} = \dfrac{a+b}{ab-1} = -\dfrac{a+b}{1-ab}$. En exploitant les mêmes ingrédients que ci-dessus (imparité de l'arctangente et relation de la question 2), on calcule alors $\arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right) = -\arctan\left(\dfrac{1}{a}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{b}\right) = \arctan(a) - \dfrac{\pi}{2} + \arctan(b) - \dfrac{\pi}{2} = \arctan(a) + \arctan(b) - \pi$. On retrouve bien sûr la même relation que par l'autre méthode.

5. Celà semble simple, on passe tout dans la tangente et on trouve à l'aide de la formule d'addition des tangentes que $\tan(\arctan(a)+\arctan(b)) = \dfrac{\tan(\arctan(a)) + \tan(\arctan(b))}{1-\tan(\arctan(a))\tan(\arctan(b))} = \dfrac{a+b}{1-ab} = \tan\left(\arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)\right)$, mais prouver l'égalité des tangentes ne fait que prouver l'égalité des angles à un multiple de π près ! Or, on sait que $a > 0$, $b > 0$ et $\dfrac{ab}{1-ab} > 0$ puisque $ab < 1$. Chacune des trois arctangentes appartient donc à l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, ce qui prouve que le

membre de gauche de la relation (A) appartient à $]0, \pi[$, et le membre de droite aussi (il est même dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$). Ils ne peuvent donc pas être séparés d'un multiple entier de π, ils sont nécessairement égaux.

6. En exploitant (A) avec $a = \frac{1}{4}$ et $b = \frac{1}{13}$ (leur produit est largement inférieur à 1), on obtient déjà $\arctan\left(\frac{1}{4}\right) + \arctan\left(\frac{1}{13}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{13}}{1-\frac{1}{52}}\right) = \arctan\left(\frac{17}{51}\right) = \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$. On recommence en posant $a = b = \frac{1}{3}$. Cette fois, $\frac{a+b}{1-ab} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, donc $2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$. Enfin, dernière application de la relation avec $a = \frac{3}{4}$ et $b = \frac{1}{7}$, on calcule cette fois $\frac{a+b}{1-ab} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{28}} = \frac{25}{25} = 1$. Eh oui, miracle, la somme demandée est bêtement égale à $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.
7. Cette fois-ci les produits sont toujours strictement supérieurs à 1. Calculons par exemple $\arctan(5) + \arctan(8) = \arctan\left(\frac{5+8}{1-40}\right) + \pi = \pi - \arctan\left(\frac{13}{39}\right) = \pi - \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$. Par ailleurs, $\arctan(2) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$, donc le nombre recherché (appelons-le Z) est égal à $Z = \frac{3\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{3}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$. Une dernière application de la relation (A) avec $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{2}$ donne $\frac{a+b}{1-ab} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{5}{5} = 1$, donc $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, et $Z = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.