

TD n° 2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

17 septembre 2020

Exercice 1

1. Pas besoin de faire de tableau ici, le cas d'une égalité de valeurs absolues se traite directement : on a soit $x^2 + x - 1 = 2x + 5$, soit $x^2 + x - 1 = -2x - 5$. La première équation est équivalente à $x^2 - x - 6 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 24 = 25$, et admet donc deux racines réelles $x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$. La deuxième équation est équivalente à $x^2 + 3x + 4$, qui a un discriminant strictement négatif, et donc pas de racine réelle. Finalement, $\mathcal{S} = \{-2, 3\}$.
2. On peut bien sûr commencer par factoriser par x pour obtenir l'équation équivalente $x(2x^3 - 3x^2 - 5x + 6) = 0$. Le deuxième facteur admet pour racine évidente $x = 1$ (puisque $2 - 3 - 5 + 6 = 0$), donc peut se factoriser sous la forme $2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$. Par identification des coefficients, on doit avoir $a = 2$, puis $b - a = -3$, donc $b = -1$, et $c - b = -5$ qui donne $c = -6$, cohérent avec la dernière condition. Il ne reste plus qu'à chercher les solutions de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 48 = 49$, et pour solutions $x_1 = \frac{1-7}{4} = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{1+7}{4} = 2$. Finalement, $\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{2}, 0, 1, 2\right\}$.
3. Cette fois-ci, on n'échappera pas à un petit tableau : la valeur absolue de gauche s'annule pour $x = -1$ et celle de droite lorsque $x = \frac{5}{2}$.

x	-1		$\frac{5}{2}$	
$ x + 1 $	$-x - 1$	0	$x + 1$	$x + 1$
$ 2x - 5 $	$5 - 2x$		$5 - 2x$	0
$ x + 1 - 2x - 5 $	$x - 6$		$3x - 4$	$-x + 6$

Il ne reste plus qu'à résoudre sur chacun des trois intervalles :

- sur $] -\infty, -1]$, l'inéquation initiale est équivalente à $x - 6 \leq 0$, soit $x \leq 6$, on peut garder tout l'intervalle $] -\infty, 6]$.
- sur $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$, l'inéquation est équivalente à $3x - 4 \leq 0$, soit $x \leq \frac{4}{3}$, qui appartient à l'intervalle de résolution, on garde donc l'intervalle $\left[-1, \frac{4}{3}\right]$.
- enfin, sur $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$, l'inéquation équivalente $-x + 6 \leq 0$ donne la condition $x \geq 6$ qui conduit à conserver l'intervalle $[6, +\infty[$.

Conclusion : $\mathcal{S} = \left]-\infty, \frac{4}{3}\right] \cup [6, +\infty[$.

4. On fait tout passer à gauche avant de mettre au même dénominateur pour obtenir l'inégalité équivalente $\frac{(3-2x)(2-x) - (2-3x)(3-x)}{(3-x)(2-x)} \leq 0$, soit $\frac{6-4x-3x+2x^2-6+9x+2x-3x^2}{(3-x)(2-x)} \leq 0$.

0, ou encore $\frac{-x^2 + 4x}{(3-x)(2-x)} \leq 0$. Le numérateur se factorise immédiatement en $x(4-x)$, on peut donc dresser rapidement un tableau de signes du quotient Q :

x	0		2		3		4		
$x(4-x)$	−	0	+		+		+	0	−
$(3-x)(2-x)$	+		+	0	−	0	+		+
Q	−	0	+		−		+	0	−

On peut conclure : $\mathcal{S} =]-\infty, 0] \cup]2, 3[\cup]4, +\infty[$.

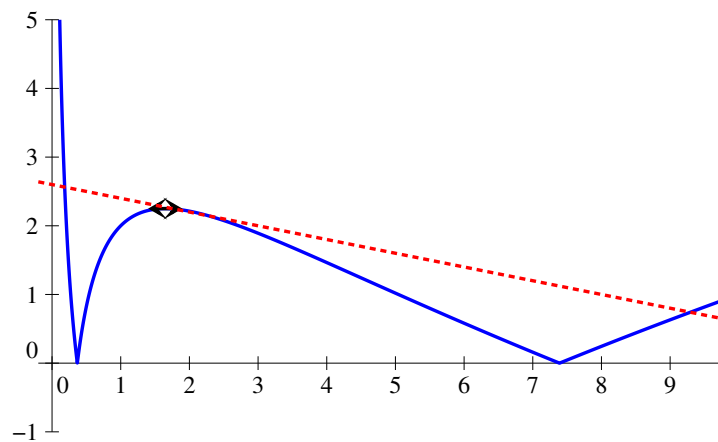
5. Commençons par constater que $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{5-1} = \frac{6+2\sqrt{5}}{2^2}$, donc $A = \sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}$. Calculons donc à partir de cette expression $A^2 = 6-2\sqrt{5} - 2\sqrt{(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})} + 6+2\sqrt{5} = 12 - 2\sqrt{36-20} = 12 - 2 \times 4 = 4$. On en déduit que $A = \pm 2$, et comme $A < 0$ (puisque $\sqrt{6+2\sqrt{5}} > \sqrt{6-2\sqrt{5}}$), on a donc $A = -2$.

Exercice 2

- En posant $X = \ln(x)$, on se ramène à l'équation du second degré $X^2 - X - 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$ et admet donc pour racines $X_1 = \frac{1-3}{2} = -1$ et $X_2 = \frac{1+3}{2} = 2$. Les solutions de l'équation initiale sont donc les deux réels $x_1 = e^{-1} = \frac{1}{e}$ et $x_2 = e^2$. L'expression $\ln^2(x) - \ln(x) - 2$ étant positive à l'extérieur de ces deux solutions, on en déduit que :
 - $f(x) = \ln^2(x) - \ln(x) - 2$ si $x \in \left]0, \frac{1}{e}\right] \cup [e^2, +\infty[$.
 - $f(x) = 2 + \ln(x) - \ln^2(x)$ si $x \in \left[\frac{1}{e}, e^2\right]$.
- Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = 4$, qui se ramène aux deux équations possibles $\ln^2(x) - \ln(x) - 2 = 4$ et $\ln^2(x) - \ln(x) - 2 = -4$. En effectuant à nouveau le changement de variable $X = \ln(x)$, la première équation se ramène à $X^2 - X - 6 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 1 + 24 = 25$, et qui admet comme racines $X_1 = \frac{1-5}{2} = -2$ et $X_2 = \frac{1+5}{2} = 3$. De même la deuxième équation se ramène à $X^2 - X + 2 = 0$, qui a un discriminant négatif et donc pas de solution réelle. Il y a donc deux antécédents pour 4, qui sont $e^{-2} = \frac{1}{e^2}$, et e^3 .
- Posons pour simplifier l'étude $g(x) = \ln^2(x) - \ln(x) - 2$, fonction définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $g'(x) = \frac{2\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} = \frac{2\ln(x)-1}{x}$. Cette dérivée est du signe de $2\ln(x)-1$, et s'annule en particulier lorsque $\ln(x) = \frac{1}{2}$, donc $x = \sqrt{e}$. On connaît déjà le signe de la fonction g (question 1), on peut donc dresser simultanément le tableau de signe et de variations de la fonction g , et en déduire le tableau de variations de f . Calculons tout de même $g(\sqrt{e}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4}$, et signalons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée ici), et comme $g(x) = \ln(x) \left(\ln(x) - 1 - \frac{2}{\ln(x)} \right)$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ (ce qui est dans la parenthèse tendant vers $+\infty$).

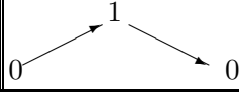
x	0	$\frac{1}{e}$	$\sqrt{e}$	e^2	$+\infty$				
$g'(x)$		-	-	0	+	+			
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. La valeur $x = 2$ se trouve sur l'intervalle sur lequel $g(x)$ est négatif, il faut donc bien faire attention aux signes : $f(2) = -g(2) = 2 + \ln(2) - \ln^2(2)$, et $f'(2) = -g'(2) = \frac{1 - 2\ln(2)}{2}$, donc la tangente a pour équation $y = \left(\frac{1}{2} - 2\frac{\ln(2)}{2}\right)(x - 2) + 2 + \ln(2) - \ln^2(2) = \frac{1 - 2\ln(2)}{2}x + 1 + 3\ln(2) - \ln^2(2)$. Son coefficient directeur est $\frac{1 - 2\ln(2)}{2} \simeq \frac{-0.4}{2} \simeq -0.2$, et son ordonnée à l'origine $1 + 3\ln(2) - \ln^2(2) \simeq 1 + 2.1 - 0.5 \simeq 2.6$.
5. On fait bien attention à ce que la fonction f n'est pas dérivable en ses points d'annulation (surtout pas de tangentes horizontales à ces endroits-là), on utilise les valeurs approchées de la question précédente pour tracer la tangente, et si on le peut on essaye d'indiquer les antécédents de 4 calculés plus haut, mais l'échelle n'est pas très adaptée pour cela (ils ne figurent pas sur la courbe ci-dessous) :

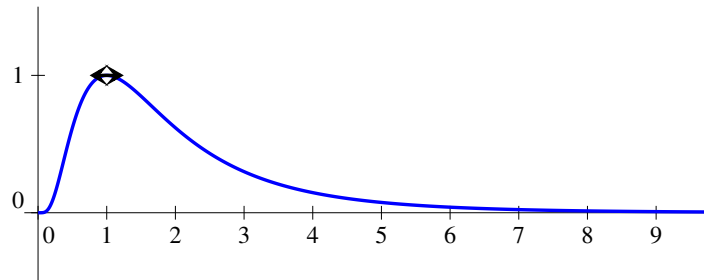


Exercice 3

- Le premier réflexe face à ce genre d'expression doit être de mettre immédiatement sous forme exponentielle : $f(x) = e^{-\ln(x) \times \ln(x)} = e^{-\ln^2(x)}$. Sous cette forme, il est évident que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+*}$.
- La fonction f est dérivable sur son intervalle de définition, de dérivée $f'(x) = -\frac{2\ln(x)}{x}e^{-\ln^2(x)}$. En particulier, $f'(x)$ est tout simplement du signe de $-\ln(x)$, et s'annule en particulier quand $x = 1$. On a bien sûr $f(1) = e^0 = 1$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} -\ln^2(x) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. C'est exactement le même calcul (et donc la même limite) en $+\infty$.
- On a déjà tout fait :

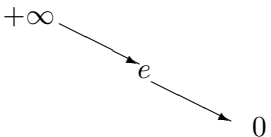
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
f			

4. Toujours en partant de la forme exponentielle, on doit résoudre $e^{-\ln^2(x)} = \frac{1}{e}$, soit $-\ln^2(x) = -1$. Autrement dit, on doit avoir $\ln(x) = \pm 1$, donc $x = e^1 = e$, ou $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.
5. Pas grand chose de passionnant à indiquer sur cette courbe, à vrai dire (on peut signaler les antécédents de $\frac{1}{e}$ si on est motivé) :

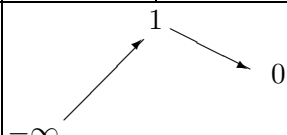


Exercice 4

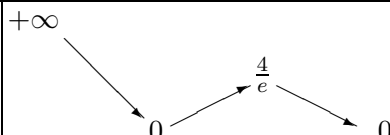
- C'est assez surprenant vu l'intitulé de la question, mais les fonctions f_n n'ont jamais de parité notable. On peut le prouver rigoureusement en calculant $f_n(1) = 1^n e^0 = 1$ et $f_n(-1) = (-1)^n e^2 = \pm e^2$. Ces deux valeurs n'étant jamais égales ou opposées, la fonction f_n ne peut pas être paire ni impaire.
- Commençons donc par $f_0 : x \mapsto e^{1-x}$. Pas besoin du moindre calcul pour affirmer que f_0 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et les limites sont évidentes, d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f_0			

Passons maintenant à $f_1 : x \mapsto x e^{1-x}$. Cette fois-ci, nous allons dériver (toutes les fonctions f_n sont dérivables sur $\mathbb{R}$) : $f_1'(x) = e^{1-x} - x e^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$. Cette dérivée s'annule en $x = 1$, valeur pour laquelle $f_1(1) = 1$ (valeur déjà calculée à la question 1). On a cette fois $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée de ce côté). De plus, $f_1(x) = -e \times (-x e^{-x})$. Comme l'énoncé affirme que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$, on en déduit facilement que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$. D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f_1'(x)$	+	0	-
f_1			

On termine avec l'étude de $f_2 : x \mapsto x^2 e^{1-x}$. Là encore, on va passer par la dérivée $f_2'(x) = 2xe^{1-x} - x^2 e^{1-x} = x(2-x)e^{1-x}$. L'étude de signe est évidente, calculons simplement $f_2(0) = 0$ et $f_2(2) = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$. Toujours aucun problème pour calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = +\infty$. De l'autre côté, on va tenter une autre approche que pour f_1 , en posant $X = 1 - x$, soit $x = 1 - X$ (la variable X tendra bien sûr vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$) pour obtenir $f(x) = (1-X)^2 e^X = X^2 e^X - 2X e^X + e^X$, ce dont on déduit (en exploitant à nouveau les résultats donnés par l'énoncé) que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0$. Un dernier tableau pour la route :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f_2'	-	0	+	0
f_2	$+\infty$ 			

3. Ce n'est pas vraiment plus compliqué : $f_n'(x) = nx^{n-1}e^{1-x} - x^n e^{1-x} = (n-x)x^{n-1}e^{1-x}$. Dans le cas où n est un entier impair, x^{n-1} est toujours positif, et la dérivée est donc très simplement du signe de $n-x$. La fonction f_n admet alors un maximum de valeur $f_n(n) = n^n e^{1-n} = e \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Le tableau de variations ressemble donc à ceci :

x	$-\infty$	n	$+\infty$
f_n	$-\infty$	$n^n e^{1-n}$	0

Dans le cas où n est pair, x^{n-1} change également de signe en 0, ce qui complique à peine le tableau :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f_n	$+\infty$	0	$n^n e^{1-n}$	0

On ne justifiera pas les limites indiquées dans les deux derniers tableaux de variations, puisque ce n'était pas demandé dans l'énoncé.

4. Dérivons donc une deuxième fois : $f_2''(x) = (2-2x)e^{1-x} - (2x-x^2)e^{1-x} = (2-4x+x^2)e^{1-x}$. Cette dérivée est donc du signe de x^2-4x+2 , trinôme dont le discriminant vaut $\Delta = 16-8 = 8$, et qui admet pour racines $x_1 = \frac{4-\sqrt{8}}{2} = 2-\sqrt{2}$, et $x_2 = \frac{4+\sqrt{8}}{2} = 2+\sqrt{2}$. La fonction f_2'' est bien sûr positive sur $] -\infty, 2-\sqrt{2}]$ et sur $[2+\sqrt{2}, +\infty[$, et négative sur $[2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}]$. Pour déterminer les équations de tangente, il faut maintenant calculer $f_2(2+\sqrt{2}) = (2+\sqrt{2})^2 e^{1-2-\sqrt{2}} = (6+4\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}}$ et $f_2'(2+\sqrt{2}) = (4+2\sqrt{2}-6-4\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}} = (-2-2\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}}$. La tangente au point d'abscisse $2+\sqrt{2}$ a donc pour équation $y = (-2-2\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}}(x-2-\sqrt{2}) + (6+4\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}} = e^{-1-\sqrt{2}}((-2-2\sqrt{2})x + 14 + 10\sqrt{2})$. Passionnant. De même pour l'autre valeur, on a $f_2(2-\sqrt{2}) = (2-\sqrt{2})^2 e^{1-2+\sqrt{2}} = (6-4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1}$ et $f_2'(2-\sqrt{2}) = (4-2\sqrt{2}-6+4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1} = (-2+2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1}$, donc la deuxième tangente demandée a pour équation $y = (-2+2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1}(x-2+\sqrt{2}) + (6-4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1} = e^{\sqrt{2}-1}((2\sqrt{2}-2)x + 14 - 10\sqrt{2})$.

5. Pour cette étude, on cherche le signe de $f_1(x) - f_0(x) = (x-1)e^{1-x}$. On obtient immédiatement les résultats suivants : $\mathcal{C}_1$ est en-dessous de $\mathcal{C}_0$ sur $] -\infty, 1]$, et au-dessus sur $[1, +\infty[$. De même on calcule $f_2(x) - f_1(x) = (x^2 - x)e^{1-x} = x(x-1)e^{1-x}$. Cette fois-ci, $\mathcal{C}_2$ est en-dessous de $\mathcal{C}_\infty$ sur $[0, 1]$, et au-dessus sur les deux intervalles $] -\infty, 0]$ et $[1, +\infty[$. Enfin, il ne faut pas oublier d'étudier aussi $f_2(x) - f_0(x) = (x^2 - 1)e^{1-x} = (x+1)(x-1)e^{1-x}$. On aura donc $\mathcal{C}_2$ en-dessous de $\mathcal{C}_0$ sur l'intervalle $[-1, 1]$, et au-dessus le reste du temps, c'est-à-dire sur $] -\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$.
6. On respecte bien entendu les positions relatives des courbes obtenues à la question précédente. On connaît déjà les coordonnées complètes des points d'intersection puisqu'on a calculé en cours d'exercice $f_n(0) = 0$ (sauf le cas particulier $f_0(0) = 1$, $f_n(1) = 1$ et $f_n(-1) = \pm e^2$ selon la parité de l'entier n). On peut aussi essayer si on est courageux d'indiquer les tangentes obtenues à la question 4, mais très sincèrement ça n'a pas grand intérêt et ça ne sera de toute façon pas très lisible (elles sont indiquées en pointillés noirs sur mon graphique). Ci-dessous, la courbe $\mathcal{C}_0$ est en bleu, $\mathcal{C}_1$ est en rouge, et $\mathcal{C}_2$ est en vert :

