# Interrogation Écrite n° 6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

29 mars 2021

1. Les définitions sont évidemment dans le cours.

2. (a) En notant $e_1$, $e_2$ et $e_3$ les trois vecteurs de la famille $\mathcal{F}$, supposons l'existence de trois réels $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$. En séparant les coordonnées, cette égalité est équivalente au système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array}\right.$. Les deux dernières équations imposent $\lambda_1 = \lambda_3 = -\lambda_2$, ce qui en reportant dans la première donne $-\lambda_2 = 0$, donc nos trois coefficients doivent être nuls, ce qui prouve que la famille est libre.

   (b) On cherche à compléter la famille en piochant des vecteurs dans une famille génératrice, par exemple la base canonique :
   - pour savoir si $(1,0,0,0) \in \text{Vect}(\mathcal{F})$, on doit résoudre le système précédent, mais en remplaçant le second membre de la première équation par 1. On obtient donc les mêmes égalités $\lambda_1 = \lambda_3 = -\lambda_2$, mais cette fois-ci, en reportant dans la première équation, on a simplement $\lambda_2 = -1$. En effet, on constate que $(1,1,0,1) - (2,0,-1,1) + (2,-1,-1,0) = (1,0,0,0)$, on ne peut donc pas ajouter ce vecteur à notre famille.
   - si on tente le vecteur $(0,1,0,0)$, on aura toujours $\lambda_1 = \lambda_3 = -\lambda_2$, mais la première équation impose à nouveau $\lambda_2 = 0$, ce qui prouve que $(0,1,0,0) \notin \text{Vect}(\mathcal{F})$, on peut donc l'ajouter à notre famille en conservant une famille libre.
   - on dispose désormais d'une famille libre de quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$, qui est donc nécessairement une base, puisque $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$.

   Conclusion : $((1,1,0,1),(2,0,-1,1),(2,-1,-1,0),(0,1,0,0))$. On pouvait aussi compléter la famille avec le vecteur $(0,0,1,0)$ ou avec $(0,0,0,1)$ (ou avec pleins d'autres vecteurs moins naturels ne faisant pas partie de la base canonique).

   (c) On cherche donc à écrire $(1,1,1,1)$ sous la forme $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4(0,1,0,0)$, ce qui nous amène à résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & & & = & 1 \\ \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 1 \\ & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & & & = & 1 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & & & = & 1 \end{array}\right.$. La dernière équation donne $\lambda_1 = 1 - \lambda_2$, la troisième $\lambda_3 = -1 - \lambda_2$, et la deuxième $\lambda_4 = 1 + \lambda_3 - \lambda_1 = -1$. On remplace tout ça dans la première : $1 - \lambda_2 + 2\lambda_2 - 2 - 2\lambda_2 = 1$, soit $\lambda_2 = -2$, puis $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_3 = 1$. On conclut : $(1,1,1,1) = (3,-2,1,-1)_{\mathcal{F}}$.

   Bien sûr, les petits malins qui auraient pris le vecteur $(0,0,1,0)$ pour compléter la base à la question précédente auront eu moins de travail puisqu'on a trivialement $(1,1,1,1) = e_1 + (0,0,1,0)$.

3. (a) On constate simplement que $F = \text{Vect}(X^4 + X, X + 1)$, ce qui prouve que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$. De plus, la famille $(X^4 + X, X + 1)$ (les polynômes la composant ne sont manifestement pas proportionnels), donc forment une base de $F$, et $\dim(F) = 2$.

   (b) Ici, le plus simple est de poser $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$. On calcule $P' = 4aX^3 + 3bX^2 + 2cX + d$, donc $P \in E$ si $4a + 3b + 2c + d = 32a + 12b + 4c + d = 0$. On « résout » le système constitué par ces deux équations : en les soustrayant, $28a + 9b + 2c = 0$, donc on peut écrire $c = -14a - \frac{9}{2}b$, puis $d = -4a - 3b - 2c = 24a + 6b$. C'est très moche, mais on a donc $G = \left\{ aX^4 + bX^3 - \left(14a + \frac{9}{2}b\right) X^2 + (24a + 6b)X + e \mid (a, b, e) \in \mathbb{R}^3 \right\}$, soit (quitte à multiplier le deuxième polynôme par 2, ce qui ne change rien à l'espace vectoriel engendré) $G = \text{Vect}(X^4 - 14X^2 + 24X, 2X^3 - 9X^2 + 12X, 1)$. La famille génératrice de trois polynômes qu'on a obtenue est échelonnée donc libre, il s'agit d'une base de $G$. On en déduit que $\dim(G) = 3$.

(c) On a déjà $\dim(F) + \dim(G) = 5 = \dim(E)$. Il suffit donc de vérifier si $F \cap G = \{0\}$. Supposons donc $P \in F \cap G$, alors par définition de $F$, on a $P = aX^4 + (a + b)X + b$, donc $P' = 4aX^3 + a + b$. Si $P$ appartient également à $G$, on doit avoir $P'(1) = P'(2) = 0$, soit $4a + a + b = 32a + a + b$, ce qui implique très facilement $a = 0$ puis $b = 0$, donc $P$ est le polynôme nul. Les deux sous-espaces sont donc bien supplémentaires.

(d) Il suffit de prouver que $X^4 + X$ est divisible par $X + 1$. C'est le cas : $X^4 + X = X(X^3 + 1) = X(X + 1)(X^2 - X + 1)$. Tout polynôme appartenant à $F$ peut donc s'écrire sous la forme $P = aX(X + 1)(X^2 - X + 1) + b(X + 1) = (X + 1)(aX^3 - aX^2 + aX + 1)$, ce qui prouve que $P$ est divisible par $X + 1$. Même en se restreignant aux polynômes appartenant à $E$, la réciproque est fausse : l'espace $F$ est de dimension 2, et l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 4 divisibles par $X + 1$ est de dimension 4 (ce sont les polynômes de la forme $(X + 1)(aX^3 + bX^2 + cX + d)$), donc contient nécessairement des polynômes n'appartenant pas à $F$.

4. (a) On va tout simplement résoudre les équations. Posons $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, alors $AM = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+z & y+t \\ x+z & z+t \end{pmatrix}$. La matrice $M$ appartient donc à $F$ si et seulement si $x + z = 2x = 2z$, et si $y + t = 2y = 2t$, ce qui implique que $x = z$ et $y = t$. Autrement dit, on trouve $F = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$, soit $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Les deux matrices obtenues n'étant manifestement pas proportionnelles, $F$ est un sous-espace de dimension 2. Pour $G$, ça va en fait aller beaucoup plus vite : $A^2 = A$, donc la condition $A^2M = AM$ est toujours vérifiée, et $G = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4. On peut prendre comme base de $G$ la base canonique : $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

(b) C'est complètement évident : si $AM = M$, en multipliant des deux côtés, on aura nécessairement $A^2M = AM$, donc toute matrice appartenant à $F$ appartient à $G$. Pour avoir égalité entre les deux espaces, il faut que l'implication récoproque soit vraie, donc qu'on puisse « simplifier par $A$ » l'égalité définissant $G$. C'est le cas si la matrice $A$ est inversible, et la réciproque est vraie, même si ce n'est pas trivial à prouver (et n'était pas attendu ici).