Interrogation Écrite n° 4

PTSI B Lycée Eiffel

11 janvier 2021

1. On reconnait une suite arithmético-géométrique, dont l'équation de point fixe $x = 2x - 3$ admet pour solution $x = 3$. On définit donc une suite auxiliaire (v_n) en posant $v_n = u_n - 3$. Comme $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = 2u_n - 6 = 2(u_n - 3) = 2v_n$, la suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = -2$. On en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2^{n+1}$, puis $u_n = v_n + 3 = 3 - 2^{n+1}$.
2. Il s'agit cette fois-ci d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée $x^2 - x + \frac{1}{4}$ a pour discriminant $\Delta = 1 - 1 = 0$, et admet donc une racine double $x_0 = \frac{1}{2}$. On peut donc affirmer l'existence de deux réels A et B tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{A + Bn}{2^n}$. La condition $v_0 = 1$ impose $A = 1$, et la condition $v_1 = 3$ se traduit par $\frac{A + B}{2} = 3$, donc $B = 6 - A = 5$. Finalement, $v_n = \frac{5n+1}{2^n}$.
3. Voici un exemple qui semble construit exprès pour nous faire utiliser un produit par la quantité conjuguée, on ne va donc pas se priver de le faire : $u_n = \frac{(n^2+n+1) - n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \frac{n+1}{\sqrt{n^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} + n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1}$. Il n'y a plus de forme indéterminée dans le quotient obtenu, on peut onclure facilement que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.
4. (a) On calcule : $u_1 = \frac{3}{2}$, $v_1 = \frac{\frac{3}{2} + 2}{2} = \frac{7}{4}$, $u_2 = \frac{\frac{7}{4} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{13}{8}$, $v_2 = \frac{\frac{13}{8} + \frac{7}{4}}{2} = \frac{27}{16}$, $u_3 = \frac{\frac{13}{8} + \frac{27}{16}}{2} = \frac{53}{32}$ et enfin $v_3 = \frac{\frac{53}{32} + \frac{27}{16}}{2} = \frac{107}{64}$.

   (b) En effet, $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{u_{n+1}}{2} - \frac{u_n}{2} = \frac{u_n + v_n}{4} - \frac{u_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{4} = \frac{1}{4} w_n$. La suite (w_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $w_0 = 1$, donc $w_n = \frac{1}{4^n}$ (ce qui est cohérent avec les premières valeurs calculées pour chacune des deux suites).

   (c) C'est évident au vu de la question précédente : $w_n = \frac{1}{4^n} > 0$ donc $v_n > u_n$.

   (d) La suite (w_n) étant géométrique de raison $\frac{1}{4}$, elle a une limite nulle, donc $\lim u_n - v_n = 0$. De plus, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante. Enfin, $v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n = \frac{u_{n+1} - v_n}{2} = \frac{u_n + v_n}{4} - \frac{v_n}{2} = \frac{u_n - v_n}{4} < 0$, donc la suite (v_n) est strictement décroissante. Les trois conditions sont vérifiées, les deux suites sont adjacentes.

   (e) C'est une somme géométrique : $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{4^n} = \frac{1 - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \times 4^n}$.

(f) Les calculs précédents ont déjà permis de constater que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2} = \dfrac{w_n}{2}$. On peut donc, en additionnant ces égalités pour des valeurs de k comprises entre 0 et n, en déduire que $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} w_k = 2\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k = 2(u_{n+1} - u_0)$ (on est en présence d'une somme télescopique). Autrement dit, on aura toujours $u_n = u_0 + \dfrac{1}{2}s_{n-1}$, donc $u_n = \dfrac{5}{3} - \dfrac{1}{6 \times 4^{n-1}}$. On en déduit $v_n = u_n + w_n = \dfrac{5}{3} - \dfrac{1}{6 \times 4^{n-1}} + \dfrac{1}{4^n} = \dfrac{5}{3} + \dfrac{1}{3 \times 4^n}$.