NOM :
Prénom :

Interrogation Écrite n° 4

PTSI B Lycée Eiffel

11 janvier 2021

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$. Déterminer une expression explicite de u_n.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$, $v_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = v_{n+1} - \frac{1}{4}v_n$. Déterminer une expression explicite de v_n.

3. Calculer la limite de la suite définie par $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n}$.

4. On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par les conditions suivantes : $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2}$.
   (a) Calculer explicitement u_1, v_1, u_2, v_2, u_3 et v_3.
   (b) Montrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (c) Montrer qu'on a toujours $u_n < v_n$.
   (d) Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   (e) En posant $s_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$, calculer la valeur de s_n.
   (f) Exprimer s_n en fonction de u_n et de u_0, et en déduire l'expression explicite de u_n en fonction de n, puis la limite des suites (u_n) et (v_n).