

Interrogation Écrite n° 2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

1er octobre 2020

1. On trouve évidemment cet énoncé dans le cours, je ne vais pas le recopier ici.
2. En posant $u(x) = \sqrt{1+x^2}$, on commence par calculer $u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. On compose ensuite par la fonction sinus pour trouver $f'(x) = u'(x) \times \cos(u(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cos(\sqrt{1+x^2})$ (inutile de chercher à simplifier cette horreur).
3. Pour être tout à fait rigoureux, il faut déjà justifier que les deux expressions dans les ln sont strictement positives, histoires que le membre de gauche de l'égalité soit bien défini. En effet, $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$, donc, quel que soit le signe de x , on a toujours $\sqrt{1+x^2} > x$ et $\sqrt{1+x^2} > -x$, ce qui assure la bonne définition de nos logarithmes. On peut donc les regrouper pour écrire $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \ln(\sqrt{1+x^2} - x) = \ln((x + \sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2} - x)) = \ln(1 + x^2 - x^2) = \ln(1) = 0$ en exploitant une identité remarquable bien connue.
4. Commençons par déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'inéquation a un sens : on doit avoir $x < 3$ pour que $3 - x$ soit strictement positif. De plus, le trinôme $x^2 - x - 2$ a pour racines évidentes -1 et 2 , il sera positif à l'extérieur de ces racines, ce qui implique finalement que $x < -1$ ou $x \in]2, 3[$. Sous cette condition, on peut écrire l'inéquation sous la forme $\ln(x^2 - x - 2) \leq \ln((3 - x)^2)$, donc $x^2 - x - 2 \leq x^2 - 6x + 9$, soit encore $5x - 11 \leq 0$, et donc $x \leq \frac{11}{5}$. Comme $\frac{11}{5} \in]2, 3[$, on a finalement $\mathcal{S} =]-\infty, -1[\cup]2, \frac{11}{5}]$.
5. (a) On doit avoir $x \neq 0$, mais aussi $x(x+2) \geq 0$, ce qui se produit à l'extérieur des deux racines 0 et -2 du trinôme. On en déduit que $\mathcal{D}_f =]-\infty, -2] \cup]0, +\infty[$.
(b) Il n'y a pas de limite à calculer en -2 , où la fonction f est définie (on a simplement $f(-2) = 0$). Pour la limite en 0 (nécessairement par valeurs positives), on peut poser $X = \frac{1}{x}$, variable qui aura pour limite $+\infty$. On écrit alors $f(x) = e^X \sqrt{\frac{1}{X} \left(\frac{1}{X} + 2 \right)} \geq e^X \sqrt{\frac{1}{X^2}} = \frac{e^X}{X}$. Or, par croissance comparée, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. Enfin, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$, il n'y a donc pas de forme indéterminée, on a simplement $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$.
(c) La fonction f est dérivable partout où elle est définie sauf en -2 , et $f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(x+2)} + e^{\frac{1}{x}} \times \frac{2x+2}{2\sqrt{x(x+2)}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2 \sqrt{x(x+2)}} \times (x^3 + x^2 - x(x+2)) = \frac{e^{\frac{1}{x}}(x^3 - 2x)}{x^2 \sqrt{x(x+2)}}$. Cette dérivée est du signe de $x^2 - 2x = x(x-2) = x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$. Le facteur $x(x+\sqrt{2})$ étant toujours positif sur chacun des deux intervalles constituant $\mathcal{D}_f$, la dérivée est en fait simplement du signe de $x - \sqrt{2}$. En particulier, f admet un minimum local quand $x = \sqrt{2}$, de valeur $f(\sqrt{2}) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$, valeur qu'on est bien incapable de calculer à la main. Allez, avec un peu de mauvaise foi, $\frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.7$, donc $\sqrt{e} < e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} < e$, on peut prendre environ 2 comme

valeur approchée possible. Et $\sqrt{2 + 2\sqrt{2}} \simeq \sqrt{4.8}$ est un peu plus grand que 2, ce qui nous donne une valeur du minimum probablement légèrement supérieure à 4 (en fait environ 4.22).

- (d) On calcule donc $f(2) = e^{\frac{1}{2}}\sqrt{8} = 2\sqrt{2e}$, puis $f'(2) = \frac{4\sqrt{e}}{4\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{e}}{2\sqrt{2}}$. L'équation recherchée est donc $y = \frac{\sqrt{e}}{2\sqrt{2}}(x - 2) + 2\sqrt{2e} = \frac{\sqrt{e}}{2\sqrt{2}}x - \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2e} = \frac{\sqrt{e}}{2\sqrt{2}}x + \frac{3\sqrt{2e}}{2}$.
- (e) Avec les informations dont vous disposiez, la courbe est forcément très imprécise. Une allure par ordinateur :

