Interrogation Écrite n^{o} 1

PTSI B Lycée Eiffel

14 septembre 2020

1. Contraposée : je ne risque pas d'avoir le COVID, donc je n'ai pas discuté avec M. Raimi.
   Réciproque : je n'ai pas discuté avec M. Raimi, donc je ne risque pas d'avoir le COVID.
2. $(a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
   $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
3. On effectue un « tableau de signes » pour gérer le membre de gauche de l'inéquation :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$ 0	$x-2$	
$\lvert 3x+1\rvert$	$-3x-1$ 0	$3x+1$	$3x+1$	
$\lvert x-2\rvert + \lvert 3x+1\rvert$	$-4x+1$	$2x+3$	$4x-1$	

   On résout ensuite l'inéquation sur chaque intervalle :
   - sur $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right]$, l'inéquation est équivalente à $-4x+1 < 4$, soit $-3 < 4x$, et donc $x > -\frac{3}{4}$. On conserve donc comme premier intervalle de solutions l'intervalle $\mathcal{S}_1 = \left]-\frac{3}{4}, -\frac{1}{3}\right]$.
   - sur $\left[-\frac{1}{3}, 2\right]$, l'inéquation est équivalente à $2x+3 < 4$, soit $x < \frac{1}{2}$, on conserve donc le deuxième intervalle $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$.
   - enfin, sur $[2, +\infty[$, on se ramène à résoudre $4x - 1 < 4$, soit $x < \frac{5}{4}$, condition qui n'est jamais vérifiée sur l'intervalle.

   Conclusion : $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \left]-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right[$.
4. Commençons déjà par constater que le membre de gauche de l'équation est toujours défini, puisque $2x^2 + x + 1$ a un discriminant strictement négatif, donc est toujours positif. On a maintenant très envie d'élever tout au carré, mais attention, il ne s'agira d'une équivalence que si $x \geqslant -1$. Sinon, de toute façon, x ne peut pas être solution de l'équation, puisque le membre de droite en est alors négatif, alors que celui de gauche est toujours positif. Pour $x \geqslant -1$, notre équation est donc équivalente à $2x^2 + x + 1 = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, donc $x^2 - x = 0$, soit encore $x(x-1) = 0$. Cette équation a pour solutions $x = 0$ et $x = 1$, qui sont bien des solutions valables, donc $\mathcal{S} = \{0, 1\}$.
5. Tout étant positif dans les deux encadrements, on peut les multiplier terme à terme pour obtenir $3 < xy \leqslant 10$ (l'inégalité de droite reste stricte, y ne pouvant pas être égal à 1). De plus, $-2 \leqslant -y < -1$, donc $1 \leqslant x - y < 4$, puis $\frac{1}{4} < \frac{1}{x-y} \leqslant 1$ (manipulations classiques pour encadrer une différence ou un inverse). Il ne reste plus qu'à multiplier à nouveau deux encadrements dont tous les termes sont positifs pour obtenir $\frac{3}{2} < \frac{2xy}{x-y} \leqslant 20$ (encadrement très large, mais on ne peut pas obtenir mieux. De façon générale, plus on combine d'opérations, moins les encadrements sont bons).