Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 9 : corrigé

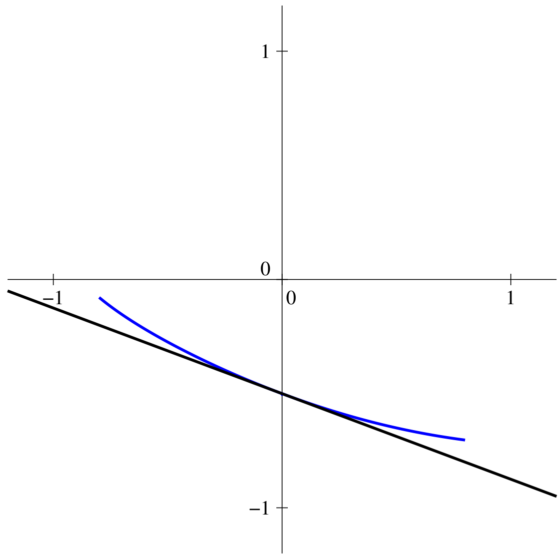
PTSI B Lycée Eiffel

29 mai 2021

Exercice : Analyse.

1. Rappelons pour commencer que $\text{ch}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$, donc $\dfrac{1}{1+\text{ch}(x)} = \dfrac{1}{2 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1 + \frac{x^2}{4} + o(x^3)}$. On peut poser $u = \dfrac{x^2}{4} + o(x^3)$ (la variable u tend bien vers 0 quand x tend vers 0), donc $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + o(u) = 1 - \dfrac{x^2}{4} + o(x^3)$. Il ne reste plus qu'à effectuer le produit par l'exponentielle : $g(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{x^2}{4} + o(x^3)\right)\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{12} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{8} + o(x^3) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{24} + o(x^3)$.
2. On sait que $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 + o(x^3)$, il ne reste plus qu'à additionner pour obtenir $f_k(x) = 1 + \dfrac{k}{2} + \dfrac{1+k}{2}x + \dfrac{k-1}{8}x^2 + \dfrac{3-2k}{48}x^3 + o(x^3)$.
3. La fonction f_k admettant toujours un développement limité à l'ordre 1 en 0, elle y est toujours dérivable, et l'équation de la tangente T_k correspondante est simplement $y = 1 + \dfrac{k}{2} + \dfrac{1+k}{2}x$.
4. Cherchons le point d'intersection de deux droites de la famille : $1 + \dfrac{k}{2} + \dfrac{1+k}{2}x = 1 + \dfrac{k'}{2} + \dfrac{1+k'}{2}x$ si $k - k' = (k'-k)x$, ce qui se produira toujours lorsque $x = -1$. L'ordonnée correspondante étant égale à $\dfrac{1}{2}$ (on remplace simplement x par -1 dans l'équation de T_k), toutes nos tangentes sont concourantes au point $\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$.
5. Pour que la fonction h_k ait une limite finie en 0, il faut que le terme en $\dfrac{1}{x}$ s'annule, ce qui se produira lorsque $1 + \dfrac{k}{2} = 0$, donc $k = -2$. On peut alors écrire $f_k(x) = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{8}x^2 + \dfrac{7}{48}x^3 + o(x^3)$, donc $h_k(x) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8}x + \dfrac{7}{48}x^2 + o(x^2)$. On en déduit successivement :
   - $\lim\limits_{x \to 0} h_k(x) = -\dfrac{1}{2}$, donc la fonction h_k est bien prolongeable par continuité en 0.
   - $h_k(x) - \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8}x\right) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{7}{48}x^2$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8}x$ est tangente à la courbe représentative de h_k en 0 (puisque la différence tend vers 0), et, comme cet équivalent est positif, que la courbe est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

   Une allure possible de courbe :



Problème 1 : Probabilités.

I. Cas d'une population de deux personnes.

1. Il ne se passera plus rien : peu importe qui on tire, la personne tirée ne peut pas influencer quelqu'un qui a déjà le même avis que lui. On conservera donc la même situation pour tous les jours suivants.
2. Pour que la situation n'évolue pas au jouer 1, il faut qu'on tire deux fois la même personne (sinon la première personne tirée fera changer d'avis la deuxième), ce qui se produit avec une probabilité $\dfrac{1}{2}$ (peu importe qui on tire en premier, il fait retirer le même ensuite). Si on veut que la situation reste la même au jour n, il faut qu'on tire deux fois la même personne à chacun des jours précédents (sinon, comme on l'a vu à la question précédente, on ne reviendra jamais en arrière). Comme la probabilité de tirer deux fois la même personne restera toujours égale à $\dfrac{1}{2}$, on a donc une probabilité égale à $\dfrac{1}{2^n}$ de ne pas avoir évolué au jour n.
3. Comme la réalisation de l'événement A_n implique celle de A_{n+1} (cf question 1), il est évident que (p_n) sera une suite croissante. Comme la probabilité de rester à la situation « un vote pour chaque candidat » tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il serait logique d'avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{2}$ (symétrie de la situation pour les deux candidats, on aura une chance sur deux de se stabiliser à une situation où tout le monde vote pour A, et et une chance sur deux pour que tout le monde vote pour B).
4. Si on veut faire un calcul direct, A_n est réalisé si et seulement si on tire d'abord la personne qui préfère A puis celle qui prèfère B à l'un des n premiers jours, avec une situation qui n'a pas évolué auparavant (après, on sait que ça ne changera plus). La probabilité que ce tirage apparaisse au jour k est de $\dfrac{1}{2^{k-1}} \times \dfrac{1}{4}$, donc $p_n = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^{k-1}} = \dfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
   Alternativement, on explique clairement que $p_n = q_n$ (où q_n est la probabilité définie à la question suivante), et que $p_n + q_n + \dfrac{1}{2^n} = 1$, puisque les trois événements A_n, B_n (les deux personnes préfèrent B au jour n) et C_n (pas d'évolution depuis le départ, on a toujours une

perosnne qui préfère chaque candidat) forment un système complet d'évènements. On a donc $2p_n + \frac{1}{2^n} = 1$ et on retrouve bien sûr la même formule.

5. Comme on l'a déjà explique, $q_n = p_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$. Sans surprise, on aura $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n + q_n = 1$, ce qui signifie qu'à long terme tout le monde finira par voter la même chose.
6. On va appliquer la formule de Bayes. On sait déjà que $P(A_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ et $P(A_3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$. Il ne reste plus qu'à signaler que $P_{A_2}(A_3) = 1$ (si A_2 est vérifié, alors A_3 l'est forcément) puis à écrire $P_{A_3}(A_2) = \frac{P(A_2) \times P_{A_2}(A_3)}{P(A_3)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{16}} = \frac{6}{7}$.

II. Cas d'une population de trois personnes.

1. L'énoncé nous affirme qu'une seule personne préfère le candidat A initialement, donc $X_0(\Omega) = \{1\}$. Ensuite, comme on ne peut gagner (ou perdre) qu'un seul vote par jour, on aura $X_1(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, puis $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ pour tout entier $n \geqslant 2$ (on ne peut bien sûr pas dépasser la population totale).
2. On a déjà signalé que $X_1(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. Pour avoir $X_1 = 0$, il faut qu'un hobitant votant pour B convainque l'unique habitant votant pour A, donc $P(X_1 = 0) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$. Symétriquement, pour avoir $X_1 = 2$, il faut que notre unique habitant votant pour A convainque l'un des deux qui votent pour B, ce qui donne aussi $P(X_1 = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$. On peut calculer la dernière probabilité en passant au complémentaire, mais un calcul direct permet de vérifier nos raisonnements : $X_1 = 1$ si on tire deux habitants ayant le même avis, donc soit deux fois l'habitant préférant A, soit deux fois de suite un des deux habitants préférant B, d'où $P(X_1 = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$. On peut résumer la loi dans un petit tableau :

k	0	1	2
$P(X_1 = k)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

On calcule ensuite facilement $E(X_1) = \frac{5}{9} + \frac{4}{9} = 1$ (normal puisque la loi est symétrique) et $E(X_1^2) = \frac{5}{9} + \frac{8}{9} = \frac{13}{9}$ donc, en appliquant la formule de König-Huygens, $V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = \frac{13}{9} - 1 = \frac{4}{9}$.

C'est un peu plus compliqué pour la loi de X_2. Commençons par le plus simple : $X_2 = 3$ si on avait $X_1 = 2$ et qu'on a ensuité tiré un des deux habitants préférant A, puis le seul habitant préférant B, donc $P(X_2 = 3) = \frac{2}{9} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{81}$. À l'inverse, on aura $X_2 = 0$ dans deux cas : si on avait déjà $X_1 = 0$ (dans ce cas la situation ne peut plus évoluer) ou si on avait $X_1 = 1$ et qu'on a tiré « B puis A », ce qui se produit toujours avec une probabilité $\frac{2}{9}$. Bref, $P(X_2 = 0) = \frac{2}{9} + \frac{5}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{28}{81}$ (on peut bien sûr faire un arbre pour mieux visualiser toutes ces possibilités). Deux possibilités également pour avoir $X_2 = 1$: soit on avait déjà $X_1 = 1$ et on n'a toujours pas évolué (la probabilité restant de $\frac{5}{9}$ à chaque fois), soit on avait $X_1 = 2$ et on a tiré « B puis A » avec probabilité $\frac{2}{9}$. Au total, $P(X_2 = 1) = \frac{5}{9} \times \frac{5}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{29}{81}$. Vérifions que la dernière probabilité est cohérente : on a $X_2 = 2$ si on avait $X_1 = 1$ et qu'on a tiré A puis B, ou qu'on avait déjà $X_1 = 2$ et qu'on a tiré deux fois la même préférence, ce qui donne $P(X_2 = 2) = \frac{5}{9} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{20}{81}$. La somme des quatre probabilités obtenues est bien égale à 1.

k	0	1	2	3
$P(X_2 = k)$	$\frac{28}{81}$	$\frac{29}{81}$	$\frac{20}{81}$	$\frac{4}{81}$

On calcule à nouveau facilement $E(X_2) = \frac{29}{81} + \frac{40}{81} + \frac{12}{81} = 1$, puis $E(X_2^2) = \frac{29}{81} + \frac{80}{81} + \frac{36}{81} = \frac{145}{81}$ donc $V(X_2) = \frac{145}{81} - 1 = \frac{64}{81}$.

3. C'est la même chose qu'à la première question de la première partie de l'exercice : si $X_n = 0$, tous les habitants préfèrent B, la situation ne peut donc plus évoluer et on aura nécessairement $X_{n+1} = 0$. De même, si $X_n = 3$, tout le monde préfère A et on restera dans la même situation au jour suivant.
4. Les calculs sont exactement ceux qu'on a effectués pour calculer la loi de X_1 : $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 0) = \frac{2}{9}$ (on doit tirer « B puis A »), $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) = \frac{5}{9}$ (en doit tirer deux personnes ayant le même avis), $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 2) = \frac{2}{9}$ (on doit cette fois tirer « A puis B »), et bien entendu $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 3) = 0$ (on ne peut pas convaincre deux personnes le même jour). De façon complètement symétrique, on aura $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 2) = \frac{5}{9}$ (on doit tirer deux personnes ayant le même avis), et $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) = P_{X_n=2}(X_{n+1} = 3) = \frac{2}{9}$ (et bien sûr $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 0) = 0$).
5. Il faut citer la formule des probabilités totales, appliquée au système complet d'évènements constitué par les quatre évènements $X_n = 0$, $X_n = 1$, $X_n = 2$ et $X_n = 3$, pour justifier correctement. Par exemple, on aura $P_{X_{n+1}=1} = P_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) \times P(X_n = 0) + P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) \times P(X_n = 1) + P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) \times P(X_n = 2) + P_{X_n=3}(X_{n+1} = 1) \times P(X_n = 3) = \frac{5}{9}P(X_n = 1) + \frac{2}{9}P(X_n = 2)$. De même, $P(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0) + \frac{2}{9}P(X_n = 1)$, et de même pour les deux autres probabilités. On obtient bien $U_{n+1} = M \times U_n$ en posant $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} & 1 \end{pmatrix}$.
6. C'est une récurrence immédiate : $M^0 U_0 = I_n U_0 = U_0$, et en supposant la formule vraie au rang n, la question précédente permet d'affirmer que $U_{n+1} = MU_n = M(M^n U_0) = M^{n+1} U_0$.
7. On applique bêtement la formule : $E(X_n) = \frac{1}{2 \times 3^n} + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n - \frac{1}{3^n} + \left(\frac{7}{9}\right)^n + 1 + \frac{1}{2 \times 3^n} - \frac{3}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n = 1$ (tout le reste se simplifie).
8. Puisque $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n = 0$, on a immédiatement $\lim_{n \to +\infty} P(X_n = 0) = \frac{2}{3}$, $\lim_{n \to +\infty} P(X_n = 1) = 0$, $\lim_{n \to +\infty} P(X_n = 2) = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} P(X_n = 3) = \frac{1}{3}$. Autrement dit, on tend à se rapprocher d'une situation où tout le monde préfère le même candidat, et il y a deux fois plus de chances que ce candidat soit le candidat B, ce qui correspond exactement à la proportion initiale de personnes préférant le candidat B au candidat A. Ce résultat est en fait généralisable : s'il y a une population quelconque, on aura toujours « à la limite » tout le monde qui préfère un des deux candidats, et la probabilité qu'il s'agisse du candidat A est exactement la proportion initiale de personnes préférant A.

Problème 2 : Algèbre linéaire.

I. Étude d'un exemple dans $\mathbb{R}^3$.

1. L'espace de départ étant le même que celui d'arrivée, il suffit de vérifier la linéarité. Soient $u(x,y,z)$ et $v(x',y',z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda u + v) = f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') = (\lambda y + y' + \lambda z + z', \lambda x + x' + \lambda z + z', \lambda x + x' + \lambda y + y') = \lambda(y+z, x+z, x+y) + (y' + z', x' + z', x' + y') = \lambda f(u) + f(v)$. L'application f est bien linéaire, c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Un vecteur $u(x,y,z)$ appartient au noyau si et seulement si $x+y+z=0$, donc si $z = -x-y$. On peut donc écrire $\ker(f) = \text{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$, et $\ker(f)$ est un espace vectoriel de dimension 2 puisque les deux vecteurs obtenues ne sont pas proportionnels. Le théorème du rang nous assure donc que $\dim(\text{Im}(f)) = 3 - 2 = 1$, ce qui est confirmé par les calcul des images des trois vecteurs de la base canonique (toutes identiques) : $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1,1,1))$.

3. Supposons $u(x,y,z) \in \ker(f) \cap \text{Im}(f)$. On doit alors avoir $x+y+z=0$ et $(x,y,z) = \lambda(1,1,1)$, ce qui implique $3\lambda = 0$ et donc $u = 0$. Autrement dit, $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$. Comme de plus $\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, on peut conclure que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

4. On calcule ici très facilement $g^2(x,y,z) = (3(x+y+z), 3(x+y+z), 3(x+y+z)) = 3g(x,y,z)$. On peut ensuite conjecturer qu'on aura $g^n = 3^{n-1}g$, ce qu'on va prouver par récurrence. La propriété est trivialement vraie pour $n = 1$, et en la supposant vraie au rang n, on pourra écrire $g^{n+1} = g \circ g^n = g \circ 3^{n-1}g = 3^{n-1}g^2 = 3^n g$, ce qui prouve l'hérédité. Par contre, la formule ne fonctionne pas pour $n = 0$: $g^0 = id$, et $\dfrac{1}{3}g$ ne ressemble pas vraiment à l'application identité.

5. On peut constater que $g = f + id$, donc $f = g - id$, et calculer $f^2 = (g - id)^2 = g^2 - 2g + id = 3g - 2g + id = g + id = f + 2\,id$. Sinon, un calcule plus explicite fonctionne bien sûr aussi.

6. D'après la question précédente, $f^2 - f = id$, donc $f \circ \left(\dfrac{1}{2}f - \dfrac{1}{2}\,id\right) = id$, ce qui prouve à la fois que f est bijective et que sa réciproque est $f^{-1} = \dfrac{1}{2}f - \dfrac{1}{2}\,id$. Autrement dit, $f^{-1}(x,y,z) = \left(\dfrac{y+z-x}{2}, \dfrac{x+z-y}{2}, \dfrac{x+y-z}{2}\right)$.

7. On prendra donc pour base la famille de trois vecteurs $\mathcal{B} = ((1,0,-1),(0,1,-1),(1,1,1))$ (qui est nécessairement une base puisque $\ker(g)$ et $\text{Im}(g)$ sont supplémentaires). Par définition, $g(1,0,-1) = g(0,1,-1) = 0$ et $g(1,1,1) = (3,3,3) = 3 \times (1,1,1)$. On en déduit que $Mat_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Pour aller vite, on peut utiliser la relation $f = g - id$ pour obtenir $Mat_{\mathcal{B}}(f) =$
$Mat_{\mathcal{B}}(f) - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

8. On écrit simplement les coordonnées de nos trois vecteurs en colonne : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
La matrice est nécessairement inversible puisque notre famille est une base. Pour l'inverser, écrivons donc un système : $\begin{cases} x \quad\quad + z = a \\ \quad\quad y + z = b \\ -x - y + z = c \end{cases}$. On peut procéder par substitution : $x = a - z$ et $y = b - z$, donc $z - a + z - b + = c$, dont on déduit $z = \dfrac{a+b+c}{3}$, puis $x = \dfrac{2a-b-c}{3}$ et $y = \dfrac{-a+2b-c}{3}$. L'inverse de notre matrice est donc

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. En notant $M = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, on calcule $PM = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, puis $PMP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice obtenue est la matrice représentative de f dans la base canonique.

II. Étude plus générale.

1. C'est la même chose que dans le cas particulier étudié précédemment : $f \circ \frac{1}{2}(f - id) = id$, donc f est bijective, de réciproque $f^{-1} = \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\,id$.
2. Calculons donc : $g \circ h = (f + id) \circ (f - 2\,id) = f^2 - f - 2\,id = 0$ puisque $f^2 = f + 2\,id$. C'est exactement la même chose pour $h \circ g$, qui est aussi nulle.
3. Pour faire beau, on peut écrire un joli système : $ag + bh = af + a\,id + bf - 2b\,id = (a+b)f + (a-2b)\,id$, qui sera manifestement égale à l'identité si $a + b = 0$ et $a - 2b = 1$ (la réciproque n'est pas évidente, mais peu importe ici). On doit donc avoir $b = -a$, soit $3a = 1$, ce qui donne finalement la relation $\frac{1}{3}g - \frac{1}{3}h = id$.

   En particulier, cela signifie que, quel que soit le vecteur $u \in E$, $\frac{1}{3}g(u) - \frac{1}{3}h(u) = u$. Or, $\frac{1}{3}g(u) \in \mathrm{Im}(g)$ et $-\frac{1}{3}h(u) \in \mathrm{Im}(h)$, ce qui suffit à prouver que $\mathrm{Im}(g) + \mathrm{Im}(h) = E$.
4. Comme $g \circ h = 0$, on a nécessairement $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(h)$ (en effet, si $v \in \mathrm{Im}(g)$, par définition, $v = g(u)$, donc $h(v) = h \circ g(u) = 0$, donc $u \in \ker(h)$). De même, on aura $\mathrm{Im}(h) \subset \ker(g)$. Le résultat obtenu à la question précédente prouve donc que $\ker(g) + \ker(h) = E$. De plus, si $u \in \ker(g) \cap \ker(h)$, le vecteur vérifie (par définition de g et h) $f(u) = -u$ et $f(u) = 2u$, ce qui implique facilement $u = 0$. On a prouvé que $\ker(g) \cap \ker(h) = 0$, les deux sous-espces sont donc bien supplémentaires dans E.
5. On note p la projection sur G parallèlement à H, et q la projection sur H parallèlement à G.
   (a) Même sans faire de dessin, les sous-espaces étant supplémentaires, on peut décomposer tout vecteur $u \in E$ sous la forme $u = u_G + u_H$, avec $u_G \in G$ et $u_H \in H$. Par définition, $f(u_G) = -u_G$ et $f(u_H) = 2u_H$, donc, par linéarité de f, $f(u) = 2u_H - u_G$. Or, la définition des projections impose que $u_G = p(u)$ et $u_H = q(u)$, donc $f(u) = 2q(u) - p(u)$. La relation étant vérifiée pour tous les vecteurs, $f = 2q - p$.
   (b) Ces deux composées sont nulles (après avoir appliqué q, on obtient un vecteur appartenant à H, donc au noyau de p, et réciproquement).
   (c) Signalons en passant que $p + q = id$ (projecteurs « opposés »), ça peut toujours servir. Calculons également $f \circ p = (2q - p) \circ p = 2q \circ p - p \circ p = -p$ (le premier terme est nul, et $p \circ p = p$ car p est un projecteur). De même, $f \circ q = 2q^2 - p \circ q = 2q$. On peut alors conjecturer que, pour tout entier naturel n, on aura $f^n = 2^n q + (-1)^n p$, ce qu'on va bien sûr prouver par récurrence. L'initialisation est faisable au rang 0 : $2^0 q + (-1)^0 p = q + p = id = f^0$. En supposant la relation vraie au rang n, on écrit ensuite simplement $f^{n+1} = f \circ f^n = f \circ (2^n q + (-1)^n p) = 2^n f \circ q + (-1)^n f \circ p = 2^{n+1} q + (-1)^{n+1} q$, ce qui prouve l'hérédité et achève la récurrence.
   (d) On devrait donc avoir $f^{-1} = \frac{1}{2}q - p$, ce qu'on peut par exemple vérifier en composant : $\left(\frac{1}{2}q - p\right) \circ (2q - p) = q^2 - \frac{1}{2}q \circ p - 2p \circ q + p^2 = q + p = id$. Ça marche, la formule est encore valable pour $n = -1$ (et en fait pour tout entier relatif).

III. Un dernier cas particulier.

1. La linéarité est évidente, mais écrivons quand même le calcul : $f(\lambda P+Q) = (\lambda P+Q)(1)(X^2+X+1)-(\lambda P+Q)(X) = \lambda P(1)(X^2+X+1)+Q(1)(X^2+X+1)-\lambda P(X)-Q(X) = f(\lambda P)+f(Q)$. Par ailleurs, $f(P)$ est somme de deux polynômes de degré (au maximum) 2 donc appartient à $\mathbb{R}_2[X]$. L'application f est donc un endomorphisme.
2. Calculons déjà $f(P)(1) = 3P(1) - P(1) = 2P(1)$, puis $f(f(P)) = 2P(1)(X^2 + X + 1) - f(P(X)) = P(1)(X^2 + X + 1) + P(X) = P(1)(X^2 + X + 1) - P(X) + 2P(X)$, ce qui prouve bien que $f^2 = f + 2\,id$ et donc qu'on peut utiliser les résultats de la partie II.
3. Pour le polynôme P donné dans l'énoncé, $P(1) = 3$, donc $f(P) = 3(X^2 + X + 1) - (X^2 - 3X + 5) = 2X^2 + 6X - 2$. En reprenant les notations de la deuxième partie, $p + q = id$ et $2q - p = f$, donc $q = \frac{1}{3}f + \frac{1}{3}id$ et $p = \frac{2}{3}id - \frac{1}{3}f$. Autrement dit, $q(P) = \frac{1}{3}(2X^2 + 6X - 2) + \frac{1}{3}(X^2 - 3X + 5) = X^2 + X + 1$, et $p(P) = \frac{2}{3}(X^2 - 3X + 5) - \frac{1}{3}(2X^2 + 6X - 2) = -4X + 4$. On applique enfin la formule prouvée en fin de partie : $f^n(P) = 2^n q(P) + (-1)^n p(P) = 2^n(X^2 + X + 1) + (-1)^n(4 - 4X) = 2^n X^2 + (2^n - 4(-1)^n)X + (2^n + 4(-1)^n)$.