Devoir Surveillé n^o 9

PTSI B Lycée Eiffel

29 mai 2021

Exercice : Analyse.

On définit pour cet exercice les fonctions réelles $g : x \mapsto \dfrac{e^x}{1 + \text{ch}(x)}$, et, pour tout réel k, $f_k : x \mapsto \sqrt{1+x} + kg(x)$.

1. Calculer le DL_3 en 0 de la fonction g.
2. En déduire le DL_3 en 0 des fonctions f_k.
3. On note T_k la tangente à la courbe représentative de f_k en son point d'abscisse 0. Montrer que T_k existe toujours et donner son équation.
4. Montrer que les droites T_k sont concourantes (en un point dont on précisera les coordonnées) quand k parcourt $\mathbb{R}$.
5. Préciser l'unique valeur de k pour laquelle la fonction $h_k : x \mapsto \dfrac{f_k(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0, et préciser dans ce cas l'allure locale de la courbe correspondante en 0 (existence d'une tangente, position relative de la courbe et de la tangente, petit dessin pour illustrer).

Problème 1 : Probabilités.

Dans un pays lointain, une élection va bientôt avoir lieu pour laquelle seuls deux candidats (notés A et B) se sont déclarés. Chaque habitant de ce pays a décidé de voter pour l'un des deux candidats, mais leur choix peut évoluer selon le processus suivant : chaque jour, on tire aléatoirement **avec remise** deux habitants. Si on a tiré deux fois la même personne, tous les habitants gardent la même intention de vote pour le jour suivant. Par contre, si on tire deux personnes différentes, la première personne tirée va influencer la seconde, qui va changer son vote pour le candidat préféré par la première personne (ou ne pas changer son vote si les deux personnes préféraient déjà le même candidat !). Ainsi, imaginons qu'au jour n, on ait 5 habitants qui aient l'intention de voter pour chaque candidat (sur une population totale de 10 habitants). Si on tire aléatoirement une première personne votant pour B et une deuxième votant pour A, on aura au jour suivant quatre personnes préférant A et six préférant B (ce qui augmente logiquement la probabilité que le déséquilibre s'accentue en faveur de B au jour d'après).

I. Cas d'une population de deux personnes.

On suppose dans cette partie que la population du pays se limite à deux personnes, et qu'au jour numéroté 0, une de ces deux personnes préfère le candidat A, et l'autre le candidat B.

1. En supposant que les deux personnes aient le même avis au jour n, que se passera-t-il ensuite ?
2. Calculer la probabilité que la situation soit toujours la même au jour numéro 1, puis au jour numéro n.

3. On note A_n l'évènement : « les deux personnes préfèrent le candidat A après n jours d'expérience », et p_n sa probabilité. Que peut-on intuitivement penser de la monotonie et de la limite de la suite (p_n) ?
4. Calculer explicitement p_n.
5. En notant de même q_n la probabilité que les deux personnes préfèrent le candidat B au bout de n jours, que vaudra q_n ? Que vaut la limite de $p_n + q_n$ quand n tend vers $+\infty$? Comment interpréter ce résultat ?
6. Calculer la probabilité conditionnelle $P_{A_3}(A_2)$.

II. Cas d'une population de trois personnes.

On suppose dans cette partie que la population du pays est de trois personnes, et qu'au jour numéroté 0, une personne exactement préfère le candidat A. On notera de plus X_n le nombre de personnes préférant le candidat A après n jours d'expérience.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable X_n (on fera attention à être précis pour les petites valeurs de n) ?
2. Calculer explicitement la loi, l'espérance et la variance des variables aléatoires X_1 et X_2.
3. De façon générale, justifier que $P_{X_n=0}(X_{n+1}=0)=1$ et $P_{X_n=3}(X_{n+1}=3)=1$.
4. Calculer (en justifiant) les probabilités conditionnelles $P_{X_n=1}(X_{n+1}=i)$ et $P_{X_n=2}(X_{n+1}=i)$ pour tous les entiers i compris entre 0 et 3 (on pourra représenter les résultats sous forme de graphe, mais ce n'est pas une obligation).
5. On note, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \\ P(X_n=3) \end{pmatrix}$. Déterminer, en justifiant **rigoureusement**, une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $U_{n+1} = M \times U_n$.
6. En déduire que, pour tout entier naturel n, $U_n = M^n U_0$.
7. On **ne demande pas** d'essayer de calculer la matrice M^n, on admet à la place que ce calcul fournirait les formules suivantes :
$$P(X_n=0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2\times 3^{n+1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n, \qquad P(X_n=1) = \frac{1}{2\times 3^n} + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n$$
$$P(X_n=2) = -\frac{1}{2\times 3^n} + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n, \qquad P(X_n=3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\times 3^{n+1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n$$
Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(X_n) = 1$.
8. Déterminer les limites des différentes probabilités quand n tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.

Problème 2 : Algèbre linéaire.

Le but de ce problème est d'étudier certaines propriétés des endomorphismes vérifiant la relation $f^2 = f + 2\,id$.

I. Étude d'un exemple dans $\mathbb{R}^3$.

On définit dans cette partie $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y+z, x+z, x+y) \end{array} \right.$, ainsi que

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x+y+z, x+y+z) \end{array} \right. .$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer le noyau et l'image de g (on ne demande pas de vérifier que g est aussi un endomorphisme).
3. Montrer que ce noyau et cette image sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
4. Calculer g^2, puis conjecturer et prouver une formule permettant d'exprimer g^n en fonction de g pour tout entier naturel $n \geqslant 1$. Cette formule reste-t-elle valable pour $n = 0$?
5. Montrer que $f^2 = f + 2\,id$ (on pourra utiliser la question précédente, mais ce n'est pas une obligation).
6. Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque f^{-1} (on exprimera f^{-1} en fonction de f et de id **et** on donnera son expression explicite).
7. En notant $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ obtenue en réunissant une base de $\ker(g)$ et une base de $\mathrm{Im}(g)$, donner la matrice représentative de g dans la base $\mathcal{B}$, puis celle de f dans cette même base (on pourra remarquer qu'il y a un lien assez simple entre f et g).
8. Écrire la matrice P de la famille $\mathcal{B}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, puis montrer que cette matrice est inversible, et calculer son inverse.
9. Calculer la matrice $P \times Mat_{\mathcal{B}}(f) \times P^{-1}$. Que constate-t-on ?

II. Étude plus générale.

On suppose dans cette partie que f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E quelconque vérifiant $f^2 = f + 2\,id$.

1. Montrer que f est un automorphisme et préciser son inverse f^{-1}.
2. En notant $g = f + id$ et $h = f - 2\,id$, calculer les composées $g \circ h$ et $h \circ g$.
3. Déterminer deux réels a et b tels que $ag + bh = id$. En déduire que $\mathrm{Im}(g) + \mathrm{Im}(h) = E$.
4. En notant $G = \ker(g)$ et $H = \ker(h)$, montrer que $\mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Ker}(h) = E$.
5. On note p la projection sur G parallèlement à H, et q la projection sur H parallèlement à G.
   (a) Expliquer pourquoi on a la relation $f = 2q - p$ (un dessin clair sera considéré comme suffisant).
   (b) Que valent $p \circ q$ et $q \circ p$?
   (c) En déduire (et démontrer) une expression de f^n en fonction de p et q, valable pour tout entier naturel n.
   (d) Cette expression reste-t-elle valable si $n = -1$?

III. Un dernier cas particulier.

On pose dans cette partie $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & P(1) \times (X^2 + X + 1) - P(X) \end{array} \right.$.

1. Justifier que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Calculer $f^2(P(X))$, et montrer qu'on peut appliquer à f les résultats de la partie précédente du problème.
3. En posant $P(X) = X^2 - 3X + 5$, calculer $f^n(P(X))$ (on pourra bien sûr utiliser les résultats de la partie II).