Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 8

PTSI B Lycée Eiffel

10 mai 2021

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on note $F = \{(x, y, z, t) \mid x+y+z+t = x-z-2t = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, 0), (0, 2, 0, a), (2, 0, 2, 1))$, où a est un réel quelconque.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, préciser sa dimension, et en donner une base.
2. La famille $((1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, 0), (0, 2, 0, a), (2, 0, 2, 1))$ est-elle une famille libre dans $\mathbb{R}^4$? En déduire la dimension et une base de G (on distinguera des cas si besoin selon la valeur du paramètre a).
3. On suppose pour cette question que $a = 0$.
   (a) Déterminer la dimension et une base de $F \cap G$.
   (b) En déduire la dimension et une base de $F+G$. Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires ?
   (c) Déterminer deux vecteurs $v \in F$ et $w \in G$ tels que $v + w = (1, 2, 3, 4)$. Cette décomposition est-elle unique ?

Exercice 2

On pose pour cet exercice $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)\ln(1-x)}$.

1. Préciser le domaine de définition de la fonction f.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f et étudier les variations de f (on pourra redériver un morceau de f' si besoin).
3. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction f. En déduire que f est prolongeable par continuité en une fonction dérivable en 0, et préciser la position relative de la courbe représentative de f et de sa tangente en son point d'abscisse 0.
4. Dresser un tableau de variations complet de la fonction f.
5. Tracer une allure de la courbe de f ainsi que de la tangente déterminée à la question 3.

Exercice 3

On considère, pour tout entier naturel n, l'équation $x + e^x = n$.

1. Montrer que cette équation admet toujours une solution unique, que nous noterons désormais u_n.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. En déduire la limite de la suite (u_n), puis que $u_n = o(e^{u_n})$.
4. Trouver un équivalent simple de u_n (qu'on démontrera **rigoureusement**).
5. On pose désormais $v_n = u_n - \ln(n)$.
   (a) Montrer que $e^{v_n} = 1 - \dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$.
   (b) En déduire (toujours **rigoureusement**) un équivalent simple de v_n, puis un développement asymptotique à deux termes de u_n.
   (c) En reprenant la même méthode que dans les deux questions précédentes, déterminer le troisième terme du développement asymptotique de u_n.

Exercice 4

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_4[X]$, on note $F = \mathrm{Vect}(X^4 + X^2, X^3 + X, X^2 + 1)$, $G = \{aX^3 + bX^2 + bX + a \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$, et $H = \{P \in E \mid P'(-1) = P'(1) = 0\}$.

1. Rappeler la dimension et la base canonique de l'espace E.
2. Montrer que tous les éléments de G sont divisibles par $X + 1$.
3. Donner une base et la dimension des sous-espaces vectoriels F et G.
4. Les deux sous-espaces F et G sont-ils en somme directe ? Sont-ils supplémentaires ?
5. Montrer que la famille $(1, X^3-3X, X^4-2X^2)$ est une base du sous-espace vectoriel H.
6. Montrer que tout polynôme de $G \cap H$ admet -1 comme racine au moins double.
7. En vous aidant ou non de la question précédente, montrer que G et H sont supplémentaires dans E.