Devoir Surveillé n^o 7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

20 mars 2021

Exercice 1

1. Notons donc α, 2α et β les trois racines (éventuellement complexes) du polynôme. Les relations coefficients-racines nous assurent notamment que $\alpha+2\alpha+\beta=0$, donc $\beta=-3\alpha$ (le coefficient de degré 2 du polynôme étant nul). Or, le produit des racines étant égal à -162, on en déduit ici que $-6\alpha^3=-162$, soit $\alpha^3=27$, et donc $\alpha=3$ (on ne peut pas se permettre de prendre un α complexe, car le polynôme est à coefficients réels, et ni 2α ni -3α ne peuvent être conjugués de α si $\alpha\notin\mathbb{R}$). Les trois racines du polynôme seraient donc 3, 6 et -9. On vérifie quand même que la dernière relation coefficients-racines est alors correcte : $3\times 6-3\times 9-6\times 9=18-27-54=-63$, tout va bien.

2. (a) Le nombre j est une racine cubique de l'unité : $j^3=1$. De plus, j^2 et 1 sont les deux autres racines cubiques de l'unité, la somme des trois est donc égale à 0.

   (b) Calculons déjà $P(j)=j^6+2j^5+4j^4+4j^3+4j^2+2j+1=1+2j^2+4j+4+4j^2+2j+1=6(1+j+j^2)=0$ (on simplifiera à chaque fois les puissances supérieures ou égales à 3 en utilisant le fait que $j^3=1$). On dérive ensuite : $P'=6X^5+10X^4+16X^3+12X^2+8X+2$, donc $P'(j)=6j^5+10j^4+16j^3+12j^2+8j+2=6j^2+10j+16+12j^2+8j+2=18(j^2+j+1)=0$. Si on est courageux, on peut même vérifier que j n'est pas racine triple : $P''=30X^4+40X^3+48X^2+24X+8$, donc $P''(j)=30j+40+48j^2+24j+8=48(1+j+j^2)+6j=6j\neq 0$.

   (c) Le polynôme étant à coefficients réel, $\overline{j}=j^2=e^{i\frac{4\pi}{3}}$ est aussi racine double de P.

   (d) On connait quatre racines (en comptant les multiplicités) de P, il nous en manque donc deux. Les plus masochistes feront une division euclidienne de P par le polynôme $Q=(X-j)^2(X-j^2)^2=(X^2+X+1)^2=X^4+2X^3+3X^2+2X+1$, mais on peut aller plus vite à l'aide des relations coefficients-racines. En notant α et β les racines manquantes, on a $2j+2j^2+\alpha+\beta=-2$. Or, $j+j^2=-1$, donc on en déduit que $\alpha+\beta=0$. Il ne reste pus qu'à exploiter le produit : $j^2(j^2)^2\alpha\beta=1$, donc $\alpha\beta=1$, ce qui donne $\alpha^2=-1$, puis $\alpha=i$ et $\beta=-i$ (ou le contraire). La factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ est donc $P=(X-j)^2(X-j^2)^2(X-i)(X+i)=\left(X+\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(X+\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2(X-i)(X+i)$.
   Dans $\mathbb{R}[X]$, on aura trois facteurs de degré 2, ou plutôt deux puisque l'un d'eux est « de multiplicité 2 » : $P=(X^2+X+1)^2(X^2+1)$.

Exercice 2

1. Calculons donc : $I_0=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\,dx=\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$. Pour I_1, plusieurs méthodes sont possibles, par exemple une IPP en posant $u(x)=x$, donc $u'(x)=1$, et $v'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$, qu'on peut intégrer en $v(x)=-\dfrac{1}{1+x}$ (ces fonctions sont bien sûr de

classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$). On obtient alors $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}\,dx = \left[-\frac{x}{1+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = -\frac{1}{2} + [\ln(x+1)]_0^1 = \ln(2) - \frac{1}{2}$.

C'est un peu pareil pour les calculs suivants, la première intégrale est triviale : $J_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(2)$, mais la deuxième l'est un peu moins. Une IPP fonctionne, même si devoir intégrer le $\ln(1+x)$ qui va apparaitre est un peu fastidieux. Plus simplement, l'astuce belge marche aussi : $J_1 = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,dx = [x - \ln(x+1)]_0^1 = 1 - \ln(2)$.

2. En effet, ça se simplifie bien : $I_{n+2}+2I_{n+1}+I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}+2x^{n+1}+x^n}{(1+x)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n(x^2+2x+1)}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. En appliquant cette formule pour $n=0$, on peut donc calculer $I_2 = 1 - 2I_1 - I_0 = 1 - 2\ln(2) + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 2\ln(2)$.
3. On applique la même formule pour $n=1$, puis pour $n=2$: $I_3 = \frac{1}{2} - 2I_2 - I_1 = \frac{1}{2} - 3 + 4\ln(2) - \ln(2) + \frac{1}{2} = 3\ln(2) - 2$, puis $I_4 = \frac{1}{3} - 2I_3 - I_2 = \frac{1}{3} - 6\ln(2) + 4 - \frac{3}{2} + 2\ln(2) = \frac{17}{6} - 4\ln(2)$.
4. Les deux méthodes habituelles fonctionnent très bien, par exemple $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{(1+x)^2}\,dx$. Sur l'intervalle $[0,1]$, la fonction sous l'intégrale est toujours négative (seul le terme $1-x$ est négatif, tout le reste est positif), donc $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ et la suite (I_n) est décroissante. Étant minorée par 0 (on intègre des fonctions positives sur l'intervalle $[0,1]$), elle converge donc.
5. Il faut réussir à majorer I_n, ce qui se fait ici très simplement : si $x \geqslant 0$, $\frac{1}{(1+x)^2} \leqslant 1$, donc $\frac{x^n}{(1+x)^2} \leqslant x^n$. On peut intégrer cette inégalité sur l'intervalle $[0,1]$ pour obtenir $I_n \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right] = \frac{1}{n+1}$. Le théorème des gendarmes appliqué à l'encadrement $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
6. Pas de piège ici, il s'agit de calculer $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}$ en effectuant une IPP. Plus précisément, on pose $u(x) = x^{n+1}$, donc $u'(x) = (n+1)x^n$, et $v'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ qui donne $v(x) = -\frac{1}{1+x}$. Les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$, et on trouve donc $I_{n+1} = \left[-\frac{x^{n+1}}{1+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(n+1)x^n}{1+x}\,dx = -\frac{1}{2} + (n+1)J_n$.
7. C'est trivial à partir de la question précédente : $J_n = \frac{I_{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)}$. On sait déjà que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$, on en déduit facilement que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$. De plus, $nJ_n = I_{n+1} + \frac{1}{2} - J_n$, on connait toutes les limites, et $\lim\limits_{n\to+\infty} nJ_n = \frac{1}{2}$.
8. C'est l'astuce belge de la première question : $J_n + J_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$.

9. Une petite récurrence est ici adaptée. On peut la commencer au rang 0, la somme de la formule proposée est alors vide et l'égalité $J_0 = \ln(2)$ est vraie. Supposons maintenant la formule vraie au rang n, alors en appliquant le résultat de la question précédente et l'hypothèse de récurrence, $J_{n+1} = \frac{1}{n+1} - J_n = \frac{1}{n+1} - (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = \frac{1}{n+1} + (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$. Il ne reste plus qu'à faire rentrer le terme $\frac{1}{n+1}$ dans la somme (il a le bon signe puisque $(-1)^{n+1} \times (-1)^{n+1-1} = -1$, et il reste encore le signe $-$ devant la somme) pour obtenir la formule au rang $n+1$ et achever la récurrence.
10. Puisqu'on sait que (J_n) a une limite nulle, on a donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ln(2)$.
11. Cette question-là est loin d'être facile. Remarquons que $u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$, ce qui prouve que la sous-suite (u_{2n}) des termes d'indices pairs de la suite (u_n) est croissante. Comme elle converge par ailleurs bien sûr vers $\ln(2)$, on a donc toujours $u_{2n} \leqslant \ln(2)$. De même, $u_{2n+3} - u_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} < 0$, ce qui prouve qu'au contraire la sous-suite (u_{2n+1}) des termes d'indices impairs de la suite (u_n) est décroissante, et que $\ln(2) \leqslant u_{2n+1}$. La limite $\ln(2)$ de la suite est donc toujours comprise entre deux termes successifs de la suite, ce qui prouve que $|u_n - \ln(2)| \leqslant |u_{n+1} - u_n|$. Or, $u_{n+1} - u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, donc on obtient bien $|u_n - \ln(2)| \leqslant \frac{1}{n+1}$.
12. Il suffit de calculer le terme d'indice 999 de la suite (u_n), puisqu'on aura alors $|u_n - \ln(2)| \leqslant \frac{1}{100}$. Autrement dit, $\ln(2) \simeq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{998} + \frac{1}{999}$ à 10^{-3} près.

Exercice 3

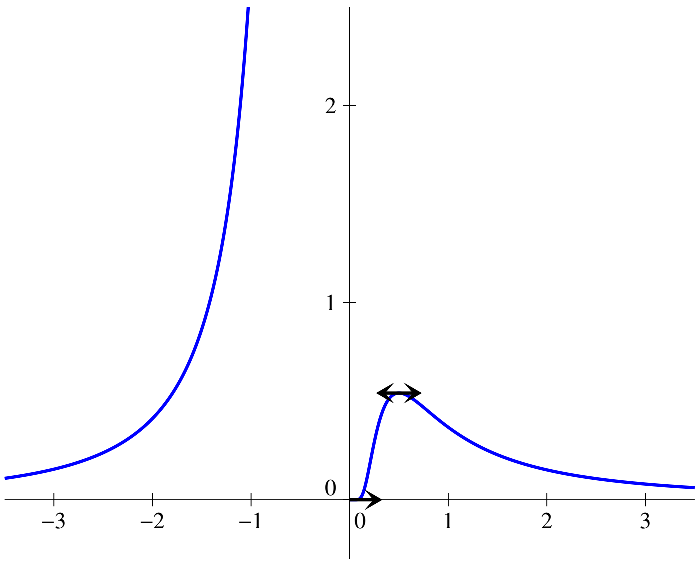
A. Étude de la fonction f.

1. En posant $X = \frac{1}{x}$, on a $f(x) = X^2 e^{-X}$. Comme $\lim_{X \to +\infty} X^2 e^{-X} = 0$ (croissance comparée classique), on en déduit que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$, la fonction f est donc prolongeable par continuité **à droite** en 0. L'énoncé était imprécis puisqu'à gauche, ça ne marche pas du tout, on a clairement $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$.

   Le taux d'accroissement de f à droite en 0 vaut alors $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$, qui a une limite tout aussi nulle en appliquant le même changement de variable. La fonction f prolongée est donc dérivable à droite en 0, et $f'_d(0) = 0$ (demi-tangente horizontale).
2. La fonction f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, de dérivée $f'(x) = -\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \times \left(\frac{1}{x^2} \right) e^{-\frac{1}{x}} = \frac{(1-2x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}$. Cette dérivée est du signe de $1-2x$, il y en particulier un maximum local pour f de valeur $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2} \simeq 0.54$ en utilisant les valeurs données plus loin dans l'énoncé. Les seules limites qui n'ont pas encore été calculées sont celles en $\pm\infty$, où il n'y a pas de forme indéterminée : $\lim_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$, donc $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Il ne reste plus qu'à dresser le tableau complet :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ 0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

3. Redérivons donc dans la joie et la bonne humeur (sur les mêmes intervalles que précédemment, et en partant de la forme non mise au même dénominateur) : $f''(x) = \left(\frac{6}{x^4} - \frac{4}{x^5}\right) e^{-\frac{1}{x}} + \left(-\frac{2}{x^5} + \frac{1}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x}} = \frac{(6x^2 - 6x + 1)e^{-\frac{1}{x}}}{x^6}$. Tout ceci est du signe de $6x^2 - 6x + 1$, trinôme de discriminant $\Delta = 36 - 24 = 12$, et admettant pour racines $x_1 = \frac{6 - \sqrt{12}}{12} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$, et $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$ (ces deux valeurs sont strictement positives). Notre dérivée seconde est donc négative uniquement entre ces deux sympathiques valeurs.
4. Il n'y a en fait pas grand chose de passionnant à indiquer :



B. Étude des dérivées successives de la fonction f.

On admettra sans justification que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

1. Il faut bien sûr procéder par récurrence. Si on a fait toute la première partie correctement, on sait déjà que la propriété est vraie au rang 0 (avec $P_0 = 1$), au rang 1 (avec $P_1 = 1 - 2X$) et au rang 2 (avec $P_2 = 6X^2 - 6X + 1$), mais bien entendu seul le rang 0 suffit pour l'initialisation. Supposons la formule vraie au rang n, et dérivons une fois de plus (on dérivera comme un produit plutôt que comme un quotient) : $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n'(x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2n+2}} + \frac{1}{x^2} \times \frac{P_n(x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2n+2}} - \frac{(2n+2)P_n(x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2n+3}} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}(x^2 P_n'(x) + P_n(x) - (2n+2)xP_n(x))}{x^{2n+4}}$, ce qui est bien de la forme $\frac{e^{-\frac{1}{x}} P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)+2}}$ en posant $P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + (1 - (2n+2)x)P_n(x)$, soit exactement la relation de récurrence annoncée par l'énoncé.
2. On a déjà donné les valeurs de P_0, P_1 et P_2 dans la question précédente. Appliquons la relation de récurrence pour calculer les deux polynômes suivants : $P_2' = 12X - 6$, donc

$P_3 = X^2P_2' + (1-6X)P_2 = 12X^3 - 6X^2 + (1-6X)(6X^2-6X+1) = 12X^3 - 6X^2 - 36X^3 + 42X^2 - 12X + 1 = -24X^3 + 36X^2 - 12X + 1$. Là, on commence à sentier confusément que le prof a encore glissé une question de calcul bien pourrie dans son DS : $P_3' = -72X^3 + 72X - 12$, donc $P_4 = X^2(-72X^2 + 72X - 12) + (1-8X)(-24X^3 + 36X^2 - 12X + 1) = -72X^4 + 72X^3 - 12X^2 + 192X^4 - 312X^3 + 132X^2 - 20X + 1$, soit $P_4 = 120X^4 - 240X^3 + 120X^2 - 20X + 1$. Je vous rassure tout de suite, ces expressions ne serviront strictement à rien (sauf éventuellement à deviner les résultats de la question suivante).

3. En observant la relation de récurrence obtenue à la première question, on voit que les termes X^2P_n' et $-2(n+1)XP_n$ ont un terme constant nul (produit par X^2 d'un côté, par X de l'autre), donc le seul terme du membre de droite pouvant en avoir un est le $1 \times P_n$, ce qui prouve tout simplement que le terme constant de P_{n+1} est le même que celui de P_n. Autrement dit, la suite des coefficients constants est constante, et ces derniers tous égaux à 1 (on a largement assez calculé de polynômes pour trouver facilement la valeur de la constante !).

   Pour le degré et le coefficient dominant, c'est plus compliqué, mais les calculs effectués nous incitent à faire une récurrence commune pour prouver que le terme dominant du polynôme P_n est égal à $(-1)^n(n+1)!X^n$ (et donc que le degré de P_n est égal à n, et son coefficient dominant égal à $(-1)^n(n+1)!$). C'est évidemment le cas pour P_0 (et accessoirement pour les quatre polynômes suivants). Supposons cette propriété vérifiée au rang n, alors le terme dominant de P_n' est égal à $(-1)^n(n+1)! \times nX^{n-1}$, et celui de X^2P_n' vaut $(-1)^n n \times (n+1)!X^{n+1}$, tandis que celui de $(1-2(n+1)X)P_n$ vaut $-2(-1)^n(n+1)(n+1)!X^{n+1}$, soit en additionnant les deux un coefficient de dégré $n+1$ qui vaut $(-1)^n n \times (n+1)! - 2(-1)^n(n+1)(n+1)! = (-1)^n(n+1)!(n-2n-2) = -(-1)^n(n+1)!(n+2) = (-1)^{n+1}(n+2)!$, soit exactement ce qu'on voulait prouver. La propriété est initialisée et héréditaire, elle est prouvée pour tout entier n.

4. On a donc $g(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, d'où $g'(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = f(x)$. Trivialement, on a donc $g^{(n+1)}(x) = (g')^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$.

5. Appliquons donc la formule de Leibniz au produit $x^2 \times f(x)$, pour calculer la dérivée $n+1$-ème de la fonction g, qui coïncide avec la dérivée n-ème de la fonction f d'après la question précédente. La somme apparaissant dans la formule de Leibniz ne contiendra que trois termes, puisque les dérivées de la fonction carré s'annulent à partir de la dérivée tierce. On obtient $f^{(n)}(x) = \binom{n+1}{0}x^2f^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1}(2x)f^{(n)}(x) + \binom{n+1}{2}2f^{(n-1)}(x) = x^2f^{(n+1)}(x) + 2(n+1)xf^{(n)}(x) + n(n+1)f^{(n-1)}(x)$. Soit, en remplaçant les dérivées par la formule générale obtenue lors de la récurrence de la première question et en simplifiant tous les $e^{-\frac{1}{x}}$ qui vont apparaitre, $\dfrac{P_n(x)}{x^{2n+2}} = \dfrac{x^2P_{n+1}(x)}{x^{2n+4}} + \dfrac{2(n+1)xP_n(x)}{x^{2n+2}} + \dfrac{n(n+1)P_{n-1}(x)}{x^{2n}}$. Tant qu'on y est, multiplions partout par x^{2n+2} : $P_n(x) = P_{n+1}(x) + 2(n+1)xP_n(x) + n(n+1)x^2P_{n-1}(x)$. Il ne reste plus qu'à isoler le $P_{n+1}(x)$ dans le membre de droite pour trouver la formule demandée.

6. En identifiant les deux formules obtenues pour $P_{n+1}(x)$, on a $x^2P_n'(x) + (1-2(n+1)x)P_n(x) = (1-2(n+1)x)P_n(x) - n(n+1)x^2P_{n-1}(x)$, donc $x^2P_n'(x) = -n(n+1)x^2P_{n-1}(x)$, dont découle la formule souhaitée. Notons en passant que cette formule, combinée avec la connaissance du coefficient constant égal à 1, per met de calculer P_n par récurrence nettement plus rapidement qu'avec la formule initiale, et donc dé vérifier très rapidement les résultats de la question 2.

7. On écrit par exemple $x^2P_n''(x) = -n(n+1)x^2P_{n-1}'(x)$ (dérivée de la formule de la question précédente, puis produit par x^2). Or, on sait que $x^2P_n'(x) = P_{n+1}(x) + (2(n+1)x-1)P_n(x)$, donc en décalant les indices $x^2P_{n-1}'(x) = P_n(x) + (2nx-1)P_{n-1}(x)$, et en remplaçant dans notre équation $x^2P_n''(x) = -n(n+1)P_n(x) - n(n+1)(2nx-1)P_{n-1}(x)$. On remplace à nouveau le dernier terme en exploitant la question 6 : $x^2P_n''(x) = -n(n+1)P_n(x) + (2nx-1)P_n'(x)$, ce qui est bien une équation différentielle du second ordre vérifiée par le polynôme P_n.