

Devoir Surveillé n° 7

PTSI B Lycée Eiffel

20 mars 2021

Exercice 1

Les deux questions de ce premier exercice sont indépendantes.

1. Déterminer les racines du polynôme $P = X^3 - 63X + 162$ sachant que, parmi ces racines, l'une est égale au double d'une autre (non, ça ne nécessite pas de faire des calculs pénibles).
2. Soit $P = X^6 + 2X^5 + 4X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 2X + 1$. On notera de plus $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
 - (a) Rappeler les valeurs de j^3 et de $1 + j + j^2$.
 - (b) Montrer que j est racine double du polynôme P .
 - (c) Quel autre nombre complexe est également racine double de P (aucun calcul nécessaire) ?
 - (d) Déterminer la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2

On définit, pour tout entier naturel n , les intégrales I_n et J_n par $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Calculer les valeurs de I_0 , I_1 , J_0 et J_1 .
2. Simplifier l'expression de $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n$, puis calculer sa valeur et en déduire celle de I_2 .
3. Déduire des questions précédentes les valeurs de I_3 et I_4 .
4. Déterminer la monotonie de la suite (I_n) , puis prouver sa convergence.
5. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.
6. Montrer la relation $I_{n+1} = (n+1)J_n - \frac{1}{2}$.
7. Donner (en justifiant) les limites de J_n et de nJ_n .
8. Exprimer $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n .
9. Montrer que $J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.
10. En déduire la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
11. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{n+1}$.
12. En déduire une méthode permettant de calculer une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-3} près (l'application numérique n'est fort heureusement pas demandée).

Exercice 3

On pose dans cet exercice $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$. Les deux parties de l'exercice sont indépendantes, il est par ailleurs totalement inutile de protester sur le fait que la première partie porte sur des notions qui n'étaient pas au programme de révisions de ce devoir.

A. Étude de la fonction f .

1. Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0. Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
2. Étudier les variations de la fonction f , et dresser un tableau de variations complet.
3. Calculer $f''(x)$ et étudier le signe de cette dérivée seconde.
4. Tracer une allure soignée de la courbe représentative de la fonction f . On rappelle que $\frac{1}{e} \simeq 0.36$ et $\frac{1}{e^2} \simeq 0.135$. On ne tiendra pas compte des calculs effectués sur f'' dans la question précédente pour ce tracé de courbe.

B. Étude des dérivées successives de la fonction f .

On admettra sans justification que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

1. Démontrer, pour tout entier naturel n , l'existence d'un polynôme P_n tel que, $\forall x > 0$,
$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2n+2}},$$
 et montrer que $P_{n+1}(x) = x^2 P_n'(x) + (1 - 2(n+1)x)P_n(x)$ (cette relation pourra naturellement être utilisée dans les questions suivantes même si on n'a pas réussi à la démontrer).
2. Déterminer les valeurs de P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4 .
3. Déterminer le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant du polynôme P_n .
4. En posant $g(x) = x^2 f(x)$, montrer que $g^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x)$.
5. À l'aide de la formule de Leibniz appliquée au calcul des dérivées de la fonction g , montrer que $P_{n+1}(x) = (1 - 2(n+1)x)P_n(x) - n(n+1)x^2 P_{n-1}(x)$.
6. Dédire des questions précédentes que $P_n'(x) = -n(n+1)P_{n-1}(x)$.
7. Déterminer enfin une équation différentielle du second ordre vérifiée par le polynôme P_n .