

Devoir Surveillé n° 6 (Devoir Bilan)

PTSI B Lycée Eiffel

27 février 2021

Exercice 1 : Mise en jambes.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer les racines cubiques du nombre $a = -2 - 2i$.
2. Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) dx$.
3. Résoudre l'équation $\arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.

1. Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f .
3. On admet pour cette question que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. En exploitant cette formule, déterminer la limite de $f'(x)$ quand x tend vers 0. Que peut-on en déduire pour le prolongement de la fonction f à $[0, +\infty[$?
4. Montrer que, $\forall x > 0$, $f''(x) = \frac{e^x(xe^x - 2e^x + x + 2)}{(e^x - 1)^3}$.
5. Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto (x - 2)e^x + x + 2$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
6. Dédire des questions précédentes le tableau de variations complet de la fonction f .
7. Tracer une allure soignée de la courbe représentative de la fonction f .
8. On considère dans cette question la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - (a) Déterminer les points fixes de la fonction f .
 - (b) Indiquer sur le graphe de la question 7 les premières valeurs de la suite (u_n) (jusqu'à u_3).
 - (c) Montrer que, $\forall x \geq 0$, $f(x) \in [0, 1]$ et $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
 - (d) Montrer rigoureusement que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|$.
 - (e) Montrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
 - (f) Donner une valeur de n pour laquelle u_n est une valeur approchée de sa limite à 10^{-3} près.

Exercice 3

On note dans cet exercice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse P^{-1} .
2. On note désormais $T = PAP^{-1}$.
 - (a) Calculer la matrice T (non, elle n'est pas diagonale, mais d'un genre remarquable quand même).
 - (b) Déterminer les puissances de la matrice T .
 - (c) En déduire celles de la matrice A .
3. On note désormais $B(t) = I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2$, pour tout réel t .
 - (a) Que vaut $B(0)$? Et $B(1)$?
 - (b) Montrer que, quels que soient les réels t et t' , on a toujours $B(t) \times B(t') = B(t + t')$.
 - (c) En déduire que la matrice $B(t)$ est toujours inversible, et déterminer son inverse en fonction de t , de I_3 , de A , et de A^2 .
 - (d) Exprimer $(B(t))^n$ en fonction de t , I_3 , A et A^2 . La formule reste-t-elle valable pour $n = -1$?
 - (e) Résoudre l'équation $B(t) = A$ (l'inconnue étant ici le réel t).

Problème

On notera dans tout ce problème sh la fonction sinus hyperbolique définie par $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et ch la fonction cosinus hyperbolique définie par $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. On notera de plus th la fonction définie par $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (fonction tangente hyperbolique), pour laquelle aucune connaissance spécifique ne sera bien entendu demandée.

A. Étude d'une fonction.

On note dans cette partie f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \text{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Quelle est la parité de la fonction f ?
2. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sh}(x)}{x}$ (on justifiera le résultat) ? En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \left(\text{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) \times \text{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$.
4. Faire une étude rapide de la fonction th , et prouver en particulier qu'on a toujours $\text{th}(x) < x$ lorsque $x > 0$.
5. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f .
6. Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f .
7. Montrer que la fonction $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est prolongeable par continuité en une fonction g définie sur $\mathbb{R}$. On admettra pour la suite que cette fonction g est en fait dérivable sur $\mathbb{R}$.

B. Une équation différentielle.

On considère dans cette partie l'équation différentielle $(E) : xy' + y = \operatorname{ch}(x)$.

1. Résoudre cette équation sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Donner sans justification les solutions de l'équation (E) sur l'intervalle $] - \infty, 0[$.
3. Montrer que g est la seule fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui soit solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

C. Étude d'une suite.

1. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{n+1}{n}$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$ pour tout entier $n \geq 1$. On notera désormais cette solution u_n .
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer que (u_n) est une suite divergeant vers $+\infty$.

D. Une fonction définie par une intégrale.

Pour tout réel strictement positif x , on note désormais $J(x) = \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt$.

1. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(x)$.
2. En notant F une primitive (quelconque) de f (qu'on ne cherchera surtout pas à calculer), exprimer $J(x)$ à l'aide de la fonction F , puis en déduire que $J'(x) = f(x) \times \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.
3. En déduire les variations de la fonction J .
4. On **admet** que la courbe représentative de J admet une asymptote oblique d'équation $y = \frac{x}{2}$ en $+\infty$, et que la courbe de J est toujours située au-dessus de cette asymptote. On **admet** également que $\lim_{x \rightarrow 0} J(x) = +\infty$. Donner le tableau de variations complet de la fonction J .
5. Tracer une allure soignée de la courbe représentative de la fonction J . On donne les valeurs suivantes : en notant $\alpha = \frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})}$, $\alpha \simeq 0.76$ et $J(\alpha) \simeq 0.65$.