

Devoir Surveillé n° 5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

23 janvier 2021

Exercice 1

1. (a) Calculons $a_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = 2u_n - v_n + 2v_n - u_n = u_n + v_n = a_n$. La suite (a_n) est donc constante égale à $a_0 = u_0 + v_0 = 3$. De même, $b_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = 2u_n - v_n - 2v_n + u_n = 3u_n - 3v_n = 3b_n$, donc la suite (b_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $b_0 = 2 - 1 = 1$. On en déduit que $b_n = 3^n$.
- (b) Comme $a_n + b_n = 2u_n$, on aura $u_n = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{3^n + 3}{2}$. De même, $v_n = \frac{a_n - b_n}{2} = \frac{3 - 3^n}{2}$.
2. (a) On effectue d'abord un calcul trivial : $A \times U_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_n - v_n \\ -u_n + 2v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$. Ensuite il faut faire une récurrence pour prouver la propriété P_n : $U_n = A^n \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. C'est vrai pour $n = 0$ puisque $A^0 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = I_2 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = U_0$. Si on suppose ensuite l'égalité vérifiée au rang n , il suffit d'écrire en exploitant la première partie de la question puis l'hypothèse de récurrence que $U_{n+1} = A \times U_n = A \times A^n \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{n+1} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ce qui prouve l'hérédité et achève la récurrence.
- (b) On obtient $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$. Les coefficients non diagonaux ont été multipliés par 4 par rapport à la matrice A , donc nécessairement $a = 4$. Ensuite, sur la diagonale, on doit avoir $5 = 4 \times 2 + b$, donc $b = -3$. En effet, on vérifie que $A^2 = 4A - 3I_2$.
- (c) C'est la récurrence classique permettant d'obtenir des relations de récurrence sur les deux suites. La propriété est vraie au rang 0 en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$, et aussi au rang 1 en posant cette fois $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$. Supposons-là vraie au rang n , alors $A^{n+1} = A^n \times A = (a_n A + b_n I_2) \times A = a_n A^2 + b_n A$. Il ne reste plus qu'à reprendre le résultat de la question précédente : $A^{n+1} = a_n(4A - 3I_2) + b_n A = (4a_n + b_n)A - 3a_n I_2$. La propriété est donc vérifiée au rang $n + 1$ avec les conditions $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -3a_n$.
- (d) Comme toujours dans ce type d'exercices, la suite (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2 : $a_{n+2} = 4a_{n+1} + b_{n+1} = 4a_{n+1} - 3a_n$. L'équation caractéristique associée $x^2 - 4x + 3 = 0$ a pour racine évidente $x_1 = 1$ et pour deuxième racine $x_2 = 3$, il existe donc deux constantes réelles α et β telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \alpha + \beta 3^n$. En particulier, $a_0 = 0$ implique $\alpha + \beta = 0$ et $a_1 = 1$ implique $\alpha + 3\beta = 1$, donc (en soustrayant les deux équations) $\beta = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -\beta = -\frac{1}{2}$. Autrement dit, $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$, dont on déduit $b_n = -3a_{n-1} = \frac{3 - 3^n}{2}$. Enfin, on calcule $A^n = \frac{3^n - 1}{2} \times A + \frac{3 - 3^n}{2} \times I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 1 - 3^n \\ 1 - 3^n & 3^n + 1 \end{pmatrix}$.

- (e) En calculant $A^n \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, on retrouve en exploitant le résultat de la question 2.a que $u_n = 3^n + 1 + \frac{1-3^n}{2} = \frac{3^n+3}{2}$, et $v_n = 1 - 3^n + \frac{3^n+1}{2} = \frac{3-3^n}{2}$. Si on échange les valeurs initiales u_0 et v_0 , cela revient à échanger le rôle de u_n et v_n puisque les relations de récurrence sont symétriques. On trouvera donc $u_n = \frac{3-3^n}{2}$ et $v_n = \frac{3^n+3}{2}$. On peut aussi retrouver ces formules en calculant $A^n \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. (a) Sur une matrice de taille 2, le pivot de Gauss est vite exécuté :

$$\begin{array}{ll} A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2 \\ \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftarrow L_2/3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

La matrice A est donc bien inversible, et $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- (b) On sait que $A^2 = 4A - 3I_2$, donc $I_2 = \frac{4}{3}A - \frac{1}{3}A^2 = A \times \left(\frac{4}{3}I_2 - \frac{1}{3}A \right)$, dont on déduit à nouveau que A est inversible, et surtout que $A^{-1} = \frac{4}{3}I_2 - \frac{1}{3}A = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, ce qui donne bien la même matrice inverse qu'avec le pivot de Gauss (heureusement).
- (c) Pour $n = -1$, on a bien sûr $3^n = \frac{1}{3}$, donc la formule de la question d donne $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = A^{-1}$.

Vérifions maintenant pour $n = -2$, où la formule de la question 2 donne $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{10}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{10}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Or, $A^{-2} = (A^{-1})^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Là encore, la formule fonctionne parfaitement.

4. (a) On commence par calculer $J^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2J$, puis on démontre facilement par récurrence que, $\forall n \geq 1$, $J^n = 2^{n-1} \times J$. C'est en effet vrai au rang 1 puisque $2^0 \times J = J$, et en le supposant vérifié au rang n , alors $J^{n+1} = J^n \times J = 2^{n-1} J^2 = 2^n J$, ce qui prouve l'hérédité.
- (b) On peut en effet écrire $A = 3I_2 - J$ (on est obligé de mettre un coefficient -1 devant J pour gérer les coefficients en-dehors de la diagonale, puis les coefficients diagonaux imposent un coefficient 3 devant I_2). Les matrices $3I_2$ et $-J$ commutent, on peut donc appliquer la formule du binôme de Newton : $A^n = (-J + 3I_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-J)^k (3I_2)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 3^{n-k} J^k$. Il faut isoler le terme numéro 0 dans la somme pour avoir le droit

de remplacer J^k par la formule démontrée ci-dessus : $A^n = 3^n I_3 + \sum_{k=1}^n (-1)^k 3^{n-k} J^k = 3^n I_2 + \sum_{k=1}^n (-1)^k 3^{n-k} 2^{k-1} J = 3^n I_2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (-2)^k 3^{n-k} J = 3^n I_2 + \frac{1}{2} ((-2+3)^n - 3^n) J = 3^n I_2 + \frac{1-3^n}{2} J$. On peut vérifier facilement que les quatre coefficients de la matrice correspondent bien à ceux calculés auparavant.

Exercice 2 (d'après un sujet de CAPES)

A. Étude d'un exemple.

- Calculons donc : $a_2 = \frac{1 \times 2}{3} = \frac{2}{3}$, puis $a_3 = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{5}{3}}{1 + \frac{4}{3}} = \frac{10}{21}$ et enfin $a_4 = \frac{\frac{10}{21} \times \frac{31}{21}}{1 + \frac{20}{21}} = \frac{310}{861}$. Heureusement qu'on ne nous a pas demandé d'aller plus loin.
- Nous allons bien sûr effectuer une démonstration par récurrence. Le terme a_2 calculé à la première question appartient bien à l'intervalle $]0, 1[$. Supposons désormais que $0 < a_n < 1$, alors $0 < 1 + a_n < 1 + 2a_n$, donc $0 < \frac{1 + a_n}{1 + 2a_n} < 1$, et on peut multiplier cet encadrement par celui de a_n (tout est positif) pour conclure que $0 < a_{n+1} < 1$, ce qui achève la récurrence.
- En effet, $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n(1 + a_n)}{1 + 2a_n} - a_n = \frac{a_n(1 + a_n) - a_n(1 + 2a_n)}{1 + a_n} = -\frac{a_n^2}{1 + a_n} < 0$ (le dénominateur étant positif puisque $a_n > 0$). La suite est donc strictement décroissante. Comme elle est de plus minorée par 0, le théorème de convergence monotone assure sa convergence vers une limite $l \in \mathbb{R}$. On peut alors passer à la limite dans la relation de récurrence $a_{n+1} = \frac{a_n(1 + a_n)}{1 + 2a_n}$: comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n(1 + a_n)}{1 + 2a_n} = \frac{l(1 + l)}{1 + 2l}$ (opérations élémentaires sur les limites, aucun risque d'annulation du dénominateur), on doit avoir $l = \frac{l(1 + l)}{1 + 2l}$, donc $l(1 + 2l) = l(1 + l)$, soit $l^2 = 0$, et donc $l = 0$. Notre suite converge donc nécessairement vers 0.
- C'est un calcul direct : $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1 + 2a_n}{a_n(1 + a_n)} - \frac{1}{1 + a_n} = \frac{1 + 2a_n - (1 + a_n)}{a_n(1 + a_n)} = \frac{1}{1 + a_n}$.
- Comme $\lim a_n = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + a_n} = 1$, ce qui suffit à assurer la convergence de (u_n) vers une limite égale à 1.
- En remplaçant u_k par son expression, la somme est en fait télescopique : $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{a_k} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \frac{1}{na_{n+1}} - \frac{1}{na_1}$.
- En exploitant le théorème de Césàro donné dans l'énoncé, on peut affirmer que la suite (v_n) a la même limite que (u_n) , c'est-à-dire qu'elle tend vers 1. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{na_1} = 0$, donc l'expression obtenue à la question précédente permet d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{na_{n+1}} = 1$, et donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_{n+1} = 1$. En fait, en écrivant $(n + 1)a_{n+1} = \frac{n + 1}{n} \times na_{n+1}$, et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 1}{n} = 1$, on peut obtenir $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1)a_{n+1} = 1$, ce qui en décalant les indices permet enfin de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 1$.

B. Réciproque du théorème de Cesàro.

1. On a donc $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+1} = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^n = \frac{(-1)^n - 1}{2n}$. Autrement dit, $v_n = 0$ lorsque n est pair (ce qui est normal puisqu'on a alors compensation exacte entre les -1 et les 1 dans la somme) et $v_n = -\frac{1}{n}$ si n est impair (là encore normal, il ne reste dans la somme qu'un seul terme égal à -1 qui ne se simplifie pas).
2. Dans la mesure où les termes non nuls de (v_n) se rapprochent de 0 , on aura $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ (si on veut être hyper rigoureux, on peut utiliser le théorème du cours qui dit que, si les deux sous-suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) convergent vers une même limite, (v_n) converge aussi vers cette limite). Par contre, la suite (u_n) ne converge pas, c'est une suite géométrique de raison -1 qui est périodique. La réciproque de Cesàro est donc manifestement fausse.

C. Une réciproque partielle.

1. La suite (u_n) étant supposée croissante, on aura $u_{n+1} \leq u_k$ pour tous les entiers k compris entre $n+1$ et $2n$. On en déduit donc que $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_{n+1} = nu_{n+1}$ (il y a bien n termes dans la somme).
2. Calculons donc $2v_{2n} - v_n = \frac{2}{2n} \sum_{k=1}^{2n} u_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{2n} u_k - \sum_{k=1}^n u_k \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$. Il ne reste alors plus qu'à diviser par n l'inégalité de la question précédente pour obtenir celle demandée ici.
3. La suite (v_n) étant convergente par hypothèse, elle est forcément bornée, donc majorée par un réel M et minorée par un réel m . Mais alors on aura toujours $v_{2n} - v_n \leq 2M - m$, donc $u_{n+1} \leq 2M - m$, et la suite (u_n) est donc majorée. Comme elle est par ailleurs croissante, le théorème de convergence monotone nous assure de sa convergence. Notons pour l'instant l la limite de la suite (u_n) et l' celle de la suite (v_n) . L'inégalité $u_{n+1} \leq v_{2n} - v_n$ permet d'obtenir, par passage à la limite, la première condition $l \leq 2l' - l'$, donc $l \leq l'$. Mais par ailleurs, comme la suite (u_n) est croissante, on a aussi $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_n = u_n$, et l'inégalité $u_n \leq v_n$ implique directement $l' \leq l$. Finalement, on a nécessairement $l = l'$, les deux suites ont bien la même limite.
4. On vient de prouver le résultat suivant : si la suite (u_n) est croissante, la réciproque du théorème de Cesàro est vraie (puisque la convergence de (v_n) implique alors celle de (u_n)). On peut facilement montrer que cette réciproque s'étend plus généralement à toutes les suites monotones.

Exercice 3

A. Un exemple de taille 2.

1. Bon, c'est vraiment pour le plaisir de faire un pivot de Gauss que je vais rédiger complètement le calcul de l'inverse ici :

$$\begin{array}{lll}
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\
\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2/2 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} &
\end{array}$$

La matrice A est donc inversible, d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. La trace de la matrice A^{-1} est donc égale à 1, et n'est pas du tout l'inverse de $\text{Tr}(A) = 2$.

2. Encore un calcul fort difficile : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Cette fois-ci on a carrément $\text{Tr}(A^2) = 0$, ce qui n'est là non plus sûrement pas égal à $(\text{Tr}(A))^2$.
3. Puisqu'il n'y a pas besoin d'être rigoureux, calculons juste $A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, puis $A^4 = -4I_2$. Les puissances vont donc être multipliées par -4 tous les quatre étapes, ce qu'on peut résumer par les formules suivantes :
 - si $n = 4k$ (avec $k \in \mathbb{N}$), alors $A^n = (-4)^k I_2 = \begin{pmatrix} (-4)^k & 0 \\ 0 & (-4)^k \end{pmatrix}$.
 - si $n = 4k + 1$, alors $A^n = (-4)^k A = \begin{pmatrix} (-4)^k & (-4)^k \\ -(-4)^k & (-4)^k \end{pmatrix}$.
 - si $n = 4k + 2$ (pair mais pas multiple de 4), alors $A^n = (-4)^k A^2 = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k 2^{2k+1} \\ (-1)^{k+1} 2^{2k+1} & 0 \end{pmatrix}$.
 - si $n = 4k + 3$, alors $A^n = (-4)^k A^3 = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} 2^{2k+1} & (-1)^k 2^{2k+1} \\ (-1)^{k+1} 2^{2k+1} & (-1)^{k+1} 2^{2k+1} \end{pmatrix}$.
4. On aura donc $\text{Tr}(A^{4k}) = (-1)^k 2^{2k+1} = \text{Tr}(A^{4k+1})$, $\text{Tr}(A^{4k+2}) = 0$ et $\text{Tr}(A^{4k+3}) = (-1)^{k+1} 2^{2k+2}$.
5. L'application n'est évidemment pas injective puisque, entre autres, les matrices I_2 et A ont la même image par la trace. Par contre, elle est certainement surjective, le réel x a par exemple pour antécédent la matrice $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

B. Un exemple de taille 3.

1. Ma religion m'interdisant de faire plus de deux pivots de Gauss dans un même corrigé de devoir, je vais cette fois-ci utiliser la méthode du système, en résolvant donc le système :

$$\begin{cases} x & - & y & + & 2z & = & a \\ & & y & - & z & = & b \\ -x & + & 2y & - & z & = & c \end{cases} \text{ . Effectuons pour commencer l'opération } L_3 \leftarrow L_3 + L_1 :$$

$$\begin{cases} x & - & y & + & 2z & = & a \\ & & y & - & z & = & b \\ & & y & + & z & = & a + c \end{cases} \text{ , puis l'opération } L_3 \leftarrow L_3 + L_2 :$$

$$\begin{cases} x & - & y & + & 2z & = & a \\ & & y & - & z & = & b \\ & & 2y & & & = & a + b + c \end{cases} \text{ . }$$

Le système est triangulaire, on peut le remonter : $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$, puis $z = y - b = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$, et enfin $x = a + y - 2z = \frac{1}{2}a + \frac{3}{2}b - \frac{1}{2}c$. La matrice P est donc inversible,

d'inverse $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Commençons par calculer $AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, puis $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Les deux traces sont nulles : $\text{Tr}(A) = -1 - 1 + 2 = 0$ et $\text{Tr}(D) = 2 + 0 - 2 = 0$.

4. C'est une récurrence classique. Au rang 0, on peut écrire $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = A^0$, donc la propriété est vérifiée. Supposons-la vraie au rang n , alors $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}A$. Or, la relation $D = P^{-1}AP$ est équivalente à $DP^{-1} = P^{-1}A$ (en multipliant les deux membres de l'égalité à droite par P^{-1}), ce qui permet d'obtenir $A^{n+1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ et d'achever ainsi la récurrence.

5. Un calcul brutal : $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$, puis $PD^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & -(-2)^{n+1} \\ 0 & 0 & -(-2)^n \\ -2^n & 0 & -(-2)^n \end{pmatrix}$, et enfin

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} + (-2)^n & 3 \times 2^{n-1} - (-2)^n & (-2)^n - 2^{n-1} \\ (-2)^{n-1} & -(-2)^{n-1} & (-2)^{n-1} \\ (-2)^{n-1} - 2^{n-1} & -3 \times 2^{n-1} - (-2)^{n-1} & 2^{n-1} + (-2)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On peut donc calculer $\text{Tr}(A^n) = 2^{n-1} + (-2)^n - (-2)^{n-1} + 2^{n-1} + (-2)^{n-1} = 2^n + (-2)^n$, soit la même valeur que $\text{Tr}(D^n)$.

6. La relation est en effet vraie quelles que soient les matrices considérées, en appliquant la propriété rappelée au début de l'énoncé : $\text{Tr}(P^{-1} \times AP) = \text{Tr}(AP \times P^{-1}) = \text{Tr}(A)$.

C. Une question indépendante pour conclure en beauté.

On cherche une matrice symétrique, donc de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$. Essayons d'éliminer

les variables au fur et à mesure qu'on récolte des informations :

- $\text{Tr}(M) = 1$, donc $a + d + f = 1$, ce qui permet d'obtenir $f = 1 - a - d$, plus que cinq variables.
- $a + b + c = 2$, donc $c = 2 - a - b$, plus que les quatre variables a, b, d et e .
- $b + d + e = 4$, donc $e = 4 - b - d$, plus que les trois variables a, b et d .
- $c + e + f = -5$, donc $2 - a - b + 4 - b - d + 1 - a - d = -5$, soit $-2a - 2b - 2d = -12$, ou encore $d = 6 - a - b$. Il ne reste plus que les deux inconnues a et b .
- la somme des quatre coins donne $a + 2c + f = -4$, donc $a + 4 - 2a - 2b + 1 - a - d = -4$, ou encore $-2a - 2b - d = -9$. Remplaçons d par son expression : $-2a - 2b - 6 + a + b = -9$, soit $a + b = 3$ et donc $b = 3 - a$.
- la dernière condition devrait toujours être vérifiée : en effet, la donnée des sommes des trois lignes impose que la somme de tous les coefficients de la matrice vaut 1. Si les quatre coins ont une somme égale à -4 , il est donc automatique que les cinq autres aient une somme égale à 5. Vérifions quand même : $2b + d + 2e = 6 - 2a + 6 - a - (3 - a) + 8 - 2b - 2d = 17 - 2a - 2b - 12 + 2a + 2b = 5$, c'est bon !

Il ne reste plus qu'à simplifier les expressions des différentes variables : $b = 3 - a$, $c = 2 - a - b = 2 - a - (3 - a) = -1$, $d = 6 - a - b = 3$, $e = 4 - b - d = 4 - 3 + a - 3 = a - 2$ et $f = 1 - a - d = -2 - a$. Il y a donc une infinité de solutions au problème, toutes les matrices de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & 3-a & -1 \\ 3-a & 3 & a-2 \\ -1 & a-2 & -2-a \end{pmatrix}, \text{ avec } a \in \mathbb{R}. \text{ Par exemple, la matrice } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ est}$$

solution.