# Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 5

PTSI B Lycée Eiffel

23 janvier 2021

## Exercice 1

On s'intéresse dans cet exercice à deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies pas les conditions suivantes : $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$ : $\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2u_n - v_n \\ v_{n+1} & = & 2v_n - u_n \end{array} \right.$. On posera également dans la suite de l'exercice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Plusieurs questions dans l'exercice permettent de démontrer de différentes façons un même résultat, il est alors bien entendu exclu d'utiliser le résultat d'une question précédente pour redémontrer une formule déjà obtenue par une autre méthode.

1. Calcul explicite de $u_n$ et $v_n$.
   (a) On pose $a_n = u_n + v_n$ et $b_n = u_n - v_n$. Vérifier que les deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont d'un type bien particulier, et déterminer leur expression explicite en fonction de $n$.
   (b) En déduire les expressions de $u_n$ et de $v_n$ en fonction de $n$.
2. Lien entre les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ et la matrice $A$ et calcul de $A^n$.
   (a) En posant, pour tout entier naturel $n$, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ (matrice à une seule colonne et deux lignes), vérifier que $U_{n+1} = A \times U_n$ et en déduire rigoureusement que $U_n = A^n \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Calculer $A^2$ et déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que $A^2 = aA + bI_2$.
   (c) Prouver par récurrence l'existence de deux suites réelles $(a_n)$ et $(b_n)$ telles que $A^n = a_nA + b_nI_2$.
   (d) Calculer explicitement $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n$, et en déduire la valeur de $A^n$ (on écrira explicitement les quatre coefficients de la matrice).
   (e) Retrouver les expressions explicites de $u_n$ et de $v_n$, puis calculer ces mêmes expressions si on modifie dans l'énoncé les conditions initiales en $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ (en conservant les mêmes relations de récurrence).
3. Différentes méthodes de calcul de l'inverse de $A$.
   (a) Calculer l'inverse $A^{-1}$ de la matrice $A$ à l'aide d'un pivot de Gauss.
   (b) Retrouver plus rapidement ce même inverse à l'aide du résultat de la question 2.$b$.
   (c) L'expression de $A^n$ obtenue à la question 2.$d$ fonctionne-t-elle pour $n = -1$ ? Et pour $n = -2$ ?
4. Calcul de $A^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
   (a) En posant $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calculer rigoureusement les puissances de la matrice $J$.
   (b) Exprimer $A$ en fonction des matrices $J$ et $I_2$, puis retrouver la valeur de $A^n$ à l'aide d'une application maîtrisée de la formule du binôme de Newton.

## Exercice 2 (d'après un sujet de CAPES)

Tout cet exercice est centré sur un théorème classique (mais pas à notre programme) sur les suites : si la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite finie $l$, et qu'on définit une suite $(v_n)$ par $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, alors la suite $(v_n)$ converge également vers $l$. Ce résultat pourra être utilisé sans démonstration tout au long de l'exercice. Il est connu sous le nom de théorème de Cesàro.

### A. Étude d'un exemple.

Dans cette première partie, on s'intéresse à la suite $(a_n)$ définie par $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n(1+a_n)}{1+2a_n}$.

1. Calculer $a_2$, $a_3$ et $a_4$.
2. Démontrer que, $\forall n \geqslant 2$, on a $0 < a_n < 1$.
3. Montrer que la suite $(a_n)$ est décroissante, et en déduire sa convergence. Déterminer sa limite.
4. Montrer que $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{1+a_n}$.
5. On pose $u_n = \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$. Déterminer la nature et la limite éventuelle de $(u_n)$.
6. En posant $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, exprimer $v_n$ en fonction de $a_{n+1}$ et de $a_1$.
7. Déduire des questions précédentes la limite de $\dfrac{a_n}{n}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

### B. Réciproque du théorème de Cesàro.

On pose dans cette partie $u_n = (-1)^n$, et toujours $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Calculer explicitement $v_n$ en fonction de $n$ (on pourra distinguer deux cas selon la parité de $n$).
2. Étudier la convergence des deux suites $(v_n)$ et $(u_n)$. La réciproque du théorème de Cesàro est-elle vraie ?

### C. Une réciproque partielle.

On suppose dans cette question que $(u_n)$ est une suite croissante, et que la suite $(v_n)$ toujours définie par $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $nu_{n+1} \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$.
2. En déduire que, $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} \leqslant 2v_{2n} - v_n$.
3. Montrer que la suite $(u_n)$ est majorée, puis convergente, puis qu'elle a la même limite que la suite $(v_n)$.
4. Énoncer un résultat réciproque (sous certaines hypothèses) du théorème de Cesàro.

## Exercice 3

On rappelle que la trace d'une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie par $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$ (somme des coefficients diagonaux de la matrice). On rappelle également que, pour deux matrices carrées de même taille, on a toujours $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

### A. Un exemple de taille 2.

On définit dans cette partie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^{-1}$. A-t-on $\mathrm{Tr}(A^{-1}) = (\mathrm{Tr}(A))^{-1}$ ?
2. Calculer $A^2$. A-t-on $\mathrm{Tr}(A^2) = (\mathrm{Tr}(A))^2$ ?
3. Calculer plus généralement $A^n$ (on pourra donner plusieurs formules selon le reste de la division de $n$ par 4, sans les démontrer par une récurrence rigoureuse).
4. En déduire la valeur de $\mathrm{Tr}(A^n)$ en fonction de $n$ (là encore on pourra distinguer plusieurs cas).
5. L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \mathrm{Tr}(M) \end{array} \right.$ est-elle une application injective ? Surjective ? On justifiera les réponses données.

### B. Un exemple de taille 3.

On définit dans cette partie deux matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Prouver que la matrice $P$ est inversible et calculer $P^{-1}$.
2. Calculer le produit $P^{-1}AP$, qu'on notera désormais $D$ (on doit obtenir une matrice diagonale).
3. Comparer la trace des matrices $A$ et $D$.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. En déduire $A^n$ (on écrira explicitement toute la matrice) puis comparer $\mathrm{Tr}(A^n)$ et $\mathrm{Tr}(D^n)$.
6. Démontrer que la relation $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(A)$ est toujours vraie.

### C. Une question indépendante pour conclure en beauté.

Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifie toutes les conditions suivantes :

- $M$ est une matrice symétrique.
- $\mathrm{Tr}(M) = 1$.
- la somme des coefficients de la première ligne de $M$ vaut 2.
- la somme des coefficients de la deuxième ligne de $M$ vaut 4.
- la somme des coefficients de la troisième ligne de $M$ vaut $-5$.
- la somme des coefficients dans les quatre coins de la matrice $M$ vaut $-4$.
- la somme des cinq autres coefficients (ceux qui ne sont pas dans les coins donc) de $M$ vaut 5.

La solution de ce problème est-elle unique ?