Devoir Surveillé n° 4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

12 décembre 2020

Exercice 1

1. En écrivant le nombre -1 sous sa forme exponentielle, $-1 = e^{i\pi}$, et en posant $z = re^{i\theta}$, résoudre l'équation $z^4 = -1$ revient à résoudre $r^4 e^{4i\theta} = e^{i\pi}$. On sépare module et argument pour obtenir les deux conditions $r^4 = 1$ et $4\theta \equiv \pi[2\pi]$, qui impliquent $r = 1$ et $\theta \equiv \dfrac{\pi}{4}\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$.
   Les quatre racines quatrièmes recherchées sont donc $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
2. On applique les formules d'Euler : $\cos^2(x)\sin^2(x) = \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 \times \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \dfrac{(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix})(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix})}{4 \times (-4)} = -\dfrac{e^{4ix} - 2 + e^{-4ix}}{16} = \dfrac{1}{8} - \dfrac{\cos(4x)}{8}$.
   On en déduit $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{8} - \dfrac{\cos(4x)}{8}\, dx = \left[\dfrac{x}{8} - \dfrac{\sin(4x)}{32}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\pi}{32}$.
3. Une factorisation par l'angle moitié permet d'écrire $z = -2e^{i\frac{\pi}{14}}(e^{-i\frac{\pi}{14}} + e^{i\frac{\pi}{14}}) = -4\cos\left(\dfrac{\pi}{14}\right)e^{i\frac{\pi}{14}} = 4\cos\left(\dfrac{\pi}{14}\right)e^{i(\frac{\pi}{14}+\pi)}$. Comme $\cos\left(\dfrac{\pi}{14}\right) > 0$, on vient d'écrire la forme exponentielle du nombre z, donc $\arg(z) \equiv \dfrac{15\pi}{14}[2\pi]$.
4. C'est une application directe du cours : $s(z) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}(z - z_A) + z_A = (-\sqrt{3} + i)(z - 3 + 2i) + 3 - 2i = (i - \sqrt{3})z + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}i - 3i - 2 + 3 - 2i = (i - \sqrt{3})z + 1 + 3\sqrt{3} - (2\sqrt{3} + 5)i$.
5. Cherchons donc une solution de la forme $z = bi$, où $b \in \mathbb{R}$. On doit alors avoir $-b^3 i - 5b^2 + 2b^2 i + 13bi - 4b + 33 - 6i = 0$. En séparant parties réelle et imaginaire, on trouve donc les deux équations $-b^3 + 2b^2 + 13b - 6 = 0$ et $-5b^2 - 4b + 33 = 0$. Cette dernière équation (du second degré) a pour discriminant $\Delta = 16 + 660 = 676 = 26^2$ (si ça ne vous saute pas aux yeux, vous pouvez commencer par factoriser par 4), et admet donc pour racines $b_1 = \dfrac{4 + 26}{-10} = -3$ et $b_2 = \dfrac{4 - 26}{-10} = \dfrac{11}{5}$. On se contente de vérifier que b_1 est aussi solution de l'autre équation (du troisième degré) : $-(-3)^3 + 2(-3)^2 + 13(-3) - 6 = 27 + 18 - 39 - 6 = 0$. Le nombre $z = -3i$ est donc solution de l'équation initiale. On peut donc factoriser son membre de gauche par $z + 3i$. On peut comme toujours effectuer une division euclidienne ou une identification. Pour cette dernière méthode, on developpe $(z + 3i)(az^2 + bz + c) = az^3 + (3ia + b)z^2 + (3ib + c)z + 3ic$. En identifiant avec notre polynôme initial, on doit donc avoir $a = 1$, puis $3ia + b = 5 - 2i$, donc $b = 5 - 5i$, et enfin $3ib + c = 13 + 4i$, donc $c = 13 + 4i - 3i(5 - 5i) = -2 - 11i$, ce qui est cohérent avec la dernière condition $3ic = 33 - 6i$.
   Reste maintenant à résoudre l'équation du second degré $z^2 + (5 - 5i)z - 2 - 11i = 0$. Elle a pour discriminant $\Delta = (5 - 5i)^2 + 4(2 + 11i) = 25 - 50i - 25 + 8 + 44i = 8 - 6i$. Cherchons un nombre complexe $\delta = a + ib$ vérifiant $\delta^2 = \Delta$. On obtient comme d'habitude les deux équations

$a^2 - b^2 = 8$ et $2ab = -6$, auxquelles on ajoute la condition sur les modules $|\delta|^2 = |\Delta|$, qui se traduit ici par $a^2+b^2 = \sqrt{8^2+6^2} = 10$. En combinant l'équation aux modules avec la première des deux autres, on trouve $2a^2 = 18$, donc $a = \pm 3$, et $2b^2 = 2$ donc $b = \pm 1$. Comme a et b doivent être de signe contraire puisque $2ab = -6$, on peut prendre $\delta = 3 - i$. On calcule alors les deux solutions restantes : $z_1 = \dfrac{-5+5i+3-i}{2} = -1+2i$ et $z_2 = \dfrac{-5+5i-3+i}{2} = -4+3i$. Conclusion : $\mathcal{S} = \{-3i, -1+2i, -4+3i\}$.

6. Puisque $f(z)$ est de la forme $az+b$, on sait déjà que f est une similitude complexe. Commençons par mettre son coefficient a sous forme exponentielle : $|-1-\sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$, donc on peut écrire $-1-\sqrt{3}i = 2\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. On peut déjà affirmer que f est une similitude de rapport 2 et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$. Il ne reste plus qu'à trouver son centre, en résolvant l'équation $f(z) = z$, soit $(-1-\sqrt{3}i)z + 2 - \sqrt{3} + (2+\sqrt{3})i = z$, ce qui donne $z = \dfrac{\sqrt{3}-2-(2+\sqrt{3})i}{-2-i\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{3}-2-(2+\sqrt{3})i)(-2+i\sqrt{3})}{4+3}$ $= \dfrac{-2\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}+3+i(3-2\sqrt{3}+4+2\sqrt{3})}{7} = \dfrac{7+7i}{7} = 1+i$. Voilà qui tombe quand même fort bien. Notre application f est donc une similitude directe de centre $A(1+i)$, de rapport 2 et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$.

7. Commençons donc par poser $Z = z^3$ pour se ramener à l'équation du second degré $Z^2 + (2i-1)Z - 1 - i = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = (2i-1)^2 + 4 + 4i = -4 - 4i + 1 + 4 + 4i = 1$, et admet donc pour solutions $Z_1 = \dfrac{1-2i+1}{2} = 1 - i$ et $Z_2 = \dfrac{1-2i-1}{2} = -i$. Reste maintenant à calculer toutes les racines cubiques de ces deux nombres pour obtenir les solutions de l'équation initiale. Pour cela, on les écrit sous forme exponentielle : $Z_1 = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ a pour racines cubiques les trois nombres $z_1 = 2^{\frac{1}{6}}e^{-i\frac{\pi}{12}}$; $z_2 = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{7\pi}{12}}$; et $z_3 = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\dfrac{1}{2^{\frac{1}{3}}} - \dfrac{1}{2^{\frac{1}{3}}}i$. De même, le nombre $Z_2 = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ a pour racines cubiques les nombres $z_4 = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$; $z_5 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; et enfin $z_6 = e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$. Les six nombres calculés sont les six solutions de l'équation initiale.

Exercice 2 (fortement inspiré d'un exercice de Bac)

1. Le centre du cercle est simplement le milieu du segment $[AB]$, donc a pour affixe $z_\Omega = \dfrac{z_A + z_B}{2} = -\dfrac{1}{2}$. Le rayon du cercle peut alors se calculer par exemple en calculant la distance $\Omega A = |z_A - z_\Omega| = \left|\dfrac{3}{2} - 2i\right| = \sqrt{\dfrac{9}{4} + 4} = \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{5}{2}$.

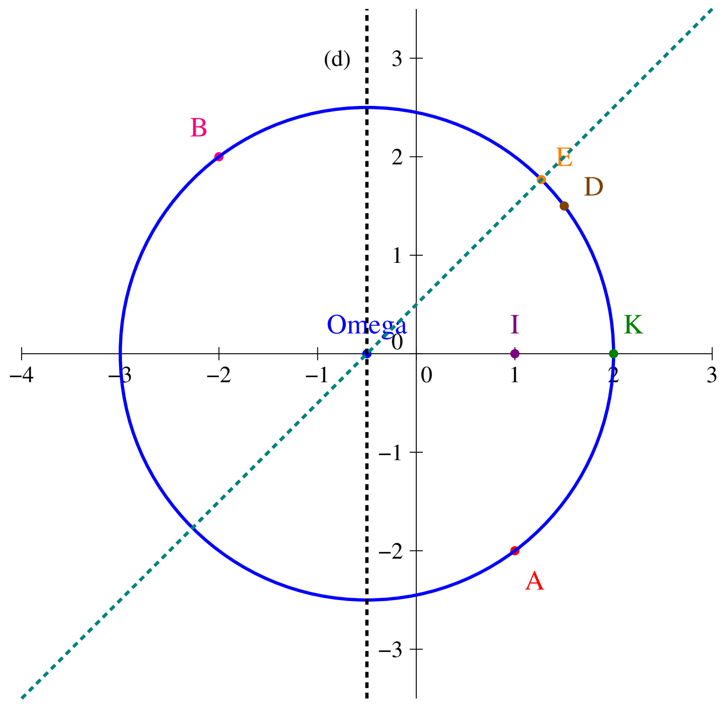
2. On commence donc par calculer $z_D = \dfrac{3+9i}{4+2i} = \dfrac{(3+9i)(4-2i)}{16+4} = \dfrac{30+30i}{20} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}i$. On peut alors calculer $D\Omega = |z_D - z_\Omega| = \left|2 + \dfrac{3}{2}i\right| = \dfrac{5}{2}$ (le calcul du module est quasiment le même qu'à la question 1). Le point D étant situé à distance R de Ω, il appartient bien au cercle $\mathcal{C}$.

3. Le triangle est rectangle en M si l'angle géométrique $\widehat{AMB}$ est un angle droit, donc si $\arg\left(\dfrac{z_A - z_M}{z_B - z_M}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, ou encore si $\dfrac{z_M - z_A}{z_M - z_B} \in i\mathbb{R}$. En posant $z_M = a + ib$, on va alors calculer la partie réelle de $\dfrac{a+ib-1+2i}{a+ib+2-2i} = \dfrac{((a-1)+i(b+2))((a+2)+i(2-b)))}{(a+2)^2+(b-2)^2}$. Notre

nombre est imaginaire pur si sa partie réelle est nulle, donc si $(a-1)(a+2)-(b+2)(2-b)=0$, soit $a^2+a-2+b^2-4=0$. On reconnait une équation de cercle qu'on va factoriser : $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+b^2-6=0$, donc $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+b^2=\frac{25}{4}$. On reconnait un cercle dont le centre a pour affixe $-\frac{1}{2}$ et donc le rayon est égal à $\frac{5}{2}$. Oh, quelle coïncidence, c'est le cercle $\mathcal{C}$! Cela ne surprendra bien sûr que ceux qui ont complètement oublié tout ce qu'ils ont vu en géométrie au collège : un point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M.

4. Comme Ω et I sont tous deux situés sur l'axe réel et que I est « à droite » de Ω, le point E est simplement situé de façon à ce que le nombre $z_E - z_\Omega$ ait pour argument $\frac{\pi}{4}$ et pour module $\frac{5}{2}$ (puisque le point appartient au cercle $\mathcal{C}$). Autrement dit, on a simplement $z_E = \frac{5}{2}e^{i\frac{\pi}{4}} + z_\Omega = \frac{5\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$. Passionnant.

5. Soit r l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $r(z) = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}$.
   (a) Il s'agit manifestement de la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   (b) Normalement, si vous avez déjà commencé à faire la figure, il devrait vous paraitre évident que $r(K)=E$. Effectuons quand même le calcul : $r(2)=\frac{5}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}$. Ah ben oui, c'est bien le point E comme prévu.
   (c) Voici la figure demandée :



   (d) On va supposer que ce qui est souhaité est une constructions géométrique permettant d'obtenir le point E à la règle et au compas en ayant uniquement au départ le repère orthonormal de tracé sur notre feuille. Une façon de faire :
   - on place sur la figure les deux points d'affixe 2 et -3.
   - on trace à la règle et au compas la médiatrice (d) du segment reliant les deux points précédemment placés (rappel : pour cela, un prend un écartement de compas aléatoire

pas trop petit, et à partir des deux points on trace deux arcs de cercle qui vont se couper en deux points appartenant à ladite médiatrice).

- le point d'intersection de cette médiatrice et de l'axe réel est Ω, ce qui permet de tracer le cercle $\mathcal{C}$ (qui passe par les deux points initiaux).
- on trace la bissectrice de l'axe réel et de la médiatrice (d) tracée précédemment (rappel : pour cela, il suffit ici de prendre un écartement de compas pas trop petit et de tracer des arcs à partir du point K et du point d'intersection de la médiatrice (d) et du cercle $\mathcal{C}$, le point d'intersection des arcs n'a plus qu'à être relié à Ω).
- le point d'intersection de cette bissectrice et du cercle $\mathcal{C}$ est le point E.

Exercice 3

1. Il s'agit d'effectuer une bijection entre les 10 élèves du groupe et les 10 places disponibles dans les deux voitures, on va donc utiliser des permutations (si vous préférez, l'ordre des élèves est important, et il n'y a pas de répétitions possibles puisqu'on ne va pas asseoir deux élèves à la même place). Il y a donc $10! = 3\ 628\ 800$ placements possibles (on donnera toutes les valeurs numériques dans ce corrigé).
2. Il y a cinq places à attribuer pour dix élèves, on va cette fois-ci avoir un arrangement : $\dfrac{10!}{5!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$ possibilités (10 élèves possibles pour la première place, plus que 9 pour la suivante etc). Alternativement, on choisit un groupe de cinq élèves parmi les 10 disponibles, puis on choisit l'ordre dans lequel on les asseoit dans la voiture, soit $\dbinom{10}{5} \times 5!$ possibilités. Les deux nombres sont bien entendu égaux, ils valent $720 * 42 = 30\ 240$.
3. On choisit la voiture dans laquelle on va caser les garçons, puis la place occupée par une fille dans cette voiture. Ensuite, il reste à ordonner les quatre garçons sur les quatre places qu'ils vont occuper, et les six filles sur les six places qu'elles vont occuper, soit $2 \times 5 \times 4! \times 6! = 10 \times 24 \times 720 = 172\ 800$ (soit une très faible proportion de l'ensemble des placements possibles, à peine 5%). Il existe plein d'autres façons d'obtenir ce résultat.
4. Une possibilité parmi d'autres : on choisit deux places dans la première voiture, puis deux places dans la deuxième, on permute les quatre garçons sur ces quatre places et les six filles sur les places restantes, soit $\dbinom{5}{2} \times \dbinom{5}{2} \times 4! \times 6! = 1\ 728\ 000$ (dix fois plus que le calcul précédent, ça se produira donc presque une fois sur deux).
5. Les places des six filles sont imposées, celles des quatre garçons aussi, il ne reste plus qu'à permuter les deux groupes, donc $4! \times 6! = 17\ 280$ placements possibles. C'est bien sûr encore dix fois moins qu'à la question 3.
6. On est donc obligés de mettre un garçon et une fille à l'avant de chaque voiture, et un garçon entouré de deux filles à l'arrière. On peut choisir successivement les choses suivantes :
   - un garçon et une fille à mettre à l'avant de la première voiture : $6 \times 4 = 24$ possibilités, à multiplier par deux pour savoir lequel des deux prendra le volant.
   - un garçon à mettre à l'arrière de la première (plus que trois possibilités, et il ne choisit pas sa place, il sera forcément au milieu).
   - une fille à mettre à sa gauche, une autre à sa droite, $5 \times 4 = 20$ choix possibles.
   - un garçon et une fille à mettre à l'avant de la deuxième voiture, $3 \times 2 = 6$ possibilités, à multiplier à nouveau par deux.
   - on n'a plus le choix pour le garçon à l'arrière, mais on a encore deux possibilités pour placer les deux dernières filles autour de lui.

   On trouve finalement $48 \times 3 \times 20 \times 12 \times 2 = 69\ 120$ cas possibles. En fait, on peut faire beaucoup plus simple : on choisit une place à l'avant dans chaque voiture (deux choix possibles à chaque fois) où on mettra des garçons, ensuite on permute les garçons sur les quatre places où ils doivent être installés, puis les six filles sur les places restantes, soit $4 \times 4! \times 6!$ possibilités.

7. Le genre de question qui fait toujours plaisir. On reprend donc tout avec les hypothèses supplémentaires :

   (a) On choisit le conducteur de la première voiture (quatre possibilités), le conducteur de la deuxième (plus que trois possibilités), puis on case les huit derniers étudiants dans un ordre aléatoire, ce qui fait $4 \times 3 \times 8! = 483\ 840$ possibilités au total.

   (b) Même principe, on choisit le conducteur (quatre possibilités) puis on effectue un arrangement de quatre étudiants sur les neuf restants, ce qui donne $4 \times \frac{9!}{5!} = 12\ 096$ possibilités pour la première voiture.

   (c) On va séparer deux types de cas : si le garçon qui a le permis ne conduit pas, on choisit la voiture où vont être les garçons (deux choix), puis on les permute sur les quatre places disponibles hors conducteurs ($4! = 24$ choix possibles), on choisit la fille qui conduit leur voiture (3 possibilités), puis celle qui conduit l'autre voiture (plus que 2 choix) et enfin on permute les quatre filles restantes sur les places « non conducteur » de la deuxième voiture. On a donc $2 \times 24 \times 6 \times 24 = 6\ 912$ cas possibles. Deuxième possibilité : le garçon conducteur conduit, on choisit alors la voiture des garçons (toujours 2 choix), la place occupée par une fille dans cette voiture (4 choix), on permute les trois garçons qui ne conduisent pas sur leurs places attitrées ($3! = 6$ choix possibles), on choisit la conductrice de la deuxième voiture (3 choix) et on permute les cinq filles restantes sur les cinq dernières places disponibles (y compris celle dans la voiture de garçons, si on isole cette place-là il faut distinguer des cas selon qu'on y met une fille qui a ou non le permis, c'est encore plus pénible), ce qui laisse un facteur $5! = 120$ à ajouter, soit donc $2 \times 4 \times 6 \times 3 \times 120 = 17\ 280$ cas. Au total on a donc 24 192 choix possibles.

   (d) Là encore c'est plus simple de distinguer deux catégories : si ce sont des filles qui conduisent dans chaque voiture, on choisit les deux conductrices ($3 \times 2 = 6$ possibilités), puis on choisit deux garçons et deux filles parmi les quatre pour compléter la première voiture (donc $\binom{4}{2}^2 = 36$ possibilités), on ordonne ces quatre personnes sur les quatre places hors conducteur de la première voiture, et on fait pareil dans la deuxième voiture ($4!$ possibilités pour chaque voiture), ce qui fait donc $6 \times 36 \times 24^2 = 124\ 416$ possibilités. Passons aux cas où le garçon qui a le permis conduit : on choisit sa voiture (2 choix), on choisit la fille qui conduit l'autre voiture (3 choix), on complète cette voiture (celle où la fille conduit) avec deux filles et deux garçons (un garçon et une fille sont déjà fixés, donc $\binom{3}{2} \times \binom{5}{2} = 30$ choix possibles), et comme auparavant on permute ces quatre occupants ainsi que les quatre de l'autre voiture, ce qui donne donc $2 \times 3 \times 30 \times 24^2 = 103\ 680$ possibilités. Au total, on a obtenu 228 096 cas pour cette question.

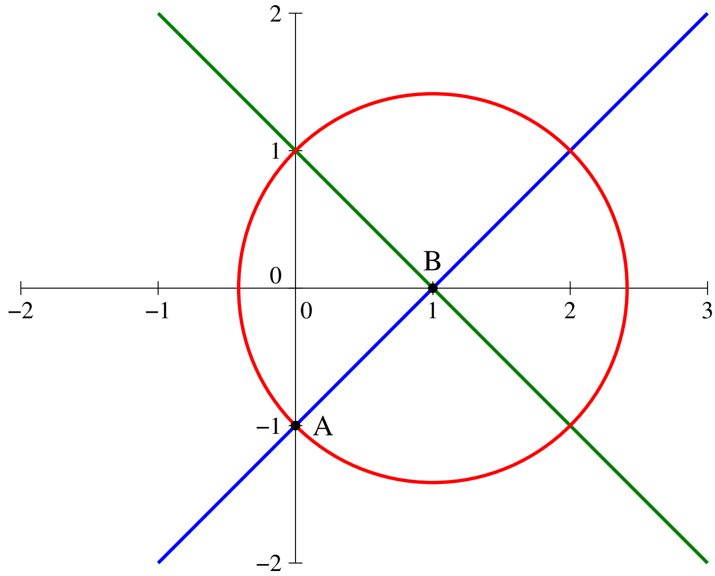
   (e) Ah, ça c'est vite fait, comme on ne peut pas faire conduire deux garçons, il n'y a aucune possibilité ici.

   (f) Devinez quoi ? On va encore distinguer selon le sexe des conducteurs. Si on fait conduire deux filles, on choisit les deux conductrices (6 choix), puis les deux garçons qui seront leurs voisins à l'avant de chaque voiture ($4 \times 3 = 12$ choix), puis les garçons au milieu à l'arrière de chaque voiture (seulement 2 choix possibles) et on permute les filles restantes sur les quatre dernières places, donc $6 \times 12 \times 2 \times 24 = 3\ 456$ cas possibles. Si le garçon qui a le permis conduit, on choisit sa voiture, (2 choix), la conductrice de l'autre voiture (3 choix), le voisin de cette conductrice (3 choix), la voisine du conducteur de l'autre voiture (5 choix), et à l'arrière c'est pareil qu'avant (2×24 choix possibles), donc $2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 48 = 4\ 320$ cas. On a donc au total 7 776 cas pour cette dernière question.

Exercice 4

1. Calculons donc : $f(1) = \dfrac{-1-i}{1+i} = -1$; $f(3i) = \dfrac{2i-2}{4i} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$; et $f(-1+2i) = \dfrac{-3+i}{-1+3i} = \dfrac{(-3+i)(-1-3i)}{10} = \dfrac{6+i}{10} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$.
2. L'équation $f(z) = 0$ implique simplement $z - 2 - i = 0$, donc l'unique antécédent de 0 par f est $2+i$. L'équation $f(z) = 1$ implique $z - 2 - i = z + i$, qui est manifestement impossible. Le nombre 1 n'a donc pas d'antécédent par f. Enfin, $f(z) = 3 - i$ si $z - 2 - i = (z+i)(3-i)$, donc $z - 2 - i = 3z - iz + 3i + 1$, ou encore $(i-2)z = 4i + 3$, dont on déduit $z = \dfrac{4i+3}{i-2} = \dfrac{(4i+3)(-i-2}{5} = \dfrac{-11i-2}{5} = -\dfrac{2}{5} - \dfrac{11}{5}i$.
3. Surtout pas de calculs compliqués pour cette question, il suffit de partir de $f(z) = \dfrac{z-2-i}{z+i} = Z$ et de calculer explicitement la réciproque : $z - 2 - i = zZ + iZ$ implique $z(1-Z) = 2 + i + iZ$, donc, si $Z \neq 1$, il admet pour unique antécédent par f le nombre $z = \dfrac{2+i+iZ}{1-Z}$. Ce calcul suffit à assurer que f est bijective entre les deux ensembles annoncés dans l'énoncé, et que $f^{-1}(z) = \dfrac{iz+2+i}{1-z}$.
4. Il s'agit cette fois de résoudre l'équation $f(z) = z$, soit $z - 2 - i = z^2 + iz$, ou encore $z^2 + (i-1)z + 2 + i = 0$. C'est une équation du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = (i-1)^2 - 4(2+i) = -2i - 8 - 4i = -8 - 6i$. On va donc chercher un nombre complexe $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$, ce qui équivaut en isolant parties réelle et imaginaire aux deux conditions $a^2 - b^2 = -8$ et $2ab = -6$. On ajoute une troisième équation à l'aide du module : $|\delta|^2 = |\Delta|$, soit $a^2 + b^2 = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. En additionnant et en soustrayant cette dernière équation à la première, on a alors $2a^2 = 2$, donc $a = \pm 1$, et $2b^2 = 18$, donc $b = \pm 3$, Comme a et b sont de signe opposé puisque $2ab = -6$, on peut par exemple prendre $\delta = 1 - 3i$. On en déduit les deux solutions de notre équation : $z_1 = \dfrac{1-i+1-3i}{2} = 1 - 2i$, et $z_2 = \dfrac{1-i-1+3i}{2} = i$. L'application f a deux points fixes.
5. À nouveau aucune raison d'être subtil : on pose brillamment $z = a + ib$, et on calcule $f(z) = \dfrac{a+ib-2-i}{a+ib+i} = \dfrac{((a-2)+i(b-1))(a-(b+1)i)}{a^2+(b+1)^2}$. Pour avoir $f(z) \in \mathbb{R}$, la partie imaginaire de $f(z)$ doit s'annuler, ce qui donne la condition $ab - a - ab - a + 2b + 2 = 0$, ou encore $b = a - 1$. On reconnait une équation de droite dans le plan, que nous représenterons après avoir traité les deux questions suivantes.
6. On reprend bien sûr l'expression obtenue à la question précédente. Cette fois-ci c'est la partie réelle qui doit s'annuler, donc $a^2 - 2a + b^2 - b + b - 1 = 0$. On reconnait une équation de cercle : $(a-1)^2 + b^2 = 2$, cercle de centre $B(1)$ (on reprend la notation de la dernière question de l'énoncé) et de rayon $\sqrt{2}$ techniquement, il faut enlever de ce cercle le point $A(-i)$ qui est à une distance $\sqrt{2}$ de B).
7. Cette fois-ci, on peut revenir à l'expression initiale de f : on veut que $\left|\dfrac{z-2-i}{z+i}\right| = 1$, donc $|z-2-i| = |z+i|$. Première méthode possible, on pose à nouveau brutalement $z = a + ib$ et on calcule les modules (en élevant au carré pour ne pas s'embêter avec des racines carrées inutiles) : $|(a-2)+i(b-1)|^2 = |a+i(b+1)|^2$ donne $(a-2)^2 + (b-1)^2 = a^2 + (b+1)^2$, soit $a^2 - 4a + 4 + b^2 - 2b + 1 = a^2 + b^2 + 2b + 1$. On reconnait finalement une équation de droite : $4a + 4b - 4 = 0$, donc $b = 1 - a$.

   Deuxième méthode une fois qu'on a écrit l'égalité des modules $|z-2-i| = |z+i|$, on se rend compte qu'il s'agit de l'ensemble des points équadistants de spoints d'affixe $2+i$ et $-i$, c'est-à-dire de la médiatrice du segment joignant ces deux points. Il est temps de faire le petit schéma demandé : la droite de la question 5 en bleu, le cercle de la question 6 en rouge et la droite de la question 7 en vert :



8. Là encore, plusieurs façons de rédiger (on peut notamment utiliser la réciproque pour « tricher » et faire un calcul ressemblant à celui de la question précédente), mais mettons-nous dans la peau d'un élève standard de PTSI qui va bêtement poser $z = a + ib$. En reprenant l'expression de la question 5 et les simplifications ultérieures de la partie réelle et de la partie imaginaire, on sait que $f(x) = \frac{1}{a^2 + (b+1)^2}(2b - 2a + 2 + i(a^2 + b^2 - 2a - 1))$. Or, si $z \in \mathbb{U}$, on sait que $a^2 + b^2 = 1$, ce qui permet de simplifier à la fois le dénominateur et la partie imaginaire de notre expression : $f(z) = \frac{1}{2b+2}(2b + 2 - 2a - 2ai) = 1 - \frac{a}{b+1} - i\frac{a}{b+1}$. Le nombre obtenu a une image dans le plan complexe appartenant à la droite d'équation $y = x + 1$.
9. Là encore, il y a plein de rédactions possibles. Partons du fait qu'un point appartenant au cercle de centre A et de rayon 1 a une affixe complexe de la forme $z = e^{i\theta} - i$, et essayons de prouver que, sous cette hypothèse, $|f(z) - 1|$ est constant (ce qui reviendra bien à montrer que $f(z)$ est situé sur un cercle de centre B). On calcule donc $f(z) - 1 = \frac{e^{i\theta} - 2 - 2i}{e^{i\theta}} - 1 = \frac{-2 - 2i}{e^{i\theta}}$. Le calcul devient essentiellement trivial puisque le dénominateur de la fraction est par définition de module 1 : $|f(z) - 1| = |-2 - 2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Le cercle recherché a donc pour rayon $2\sqrt{2}$.