Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 4

PTSI B Lycée Eiffel

12 décembre 2020

Exercice 1

Les divers calculs de ce premier exercice sont comme d'habitude complètement indépendants.

1. Déterminer toutes les racines quatrièmes (complexes) du nombre -1 (on donnera leur forme exponentielle et leur forme algébrique).
2. Linéariser le produit $\cos^2(x)\sin^2(x)$. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x)\sin^2(x)\ dx$.
3. Calculer un argument du nombre complexe $z = -2(1 + e^{i\frac{\pi}{7}})$.
4. On note A le point du plan d'affixe $z_A = 3 - 2i$, et s la similitude directe de centre A, d'angle $\dfrac{5\pi}{6}$ et de rapport 2. Donner l'expression algébrique de la similitude s (calculez $s(z)$, quoi...).
5. Résoudre l'équation $z^3 + (5-2i)z^2 + (13+4i)z + 3(11-2i) = 0$. Indication : elle possède une solution imaginaire pure.
6. On définit l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & (-1-\sqrt{3}i)z + 2 - \sqrt{3} + (2+\sqrt{3})i \end{array} \right.$. Donner les caractéristiques de l'application f.
7. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 + (2i-1)z^3 - 1 - i = 0$ (on exprimera les solutions sous forme exponentielle pour celles dont on ne peut pas écrire explicitement la forme algébrique).

Exercice 2 (fortement inspiré d'un exercice de Bac)

Dans le plan complexe, on désigne par I le point d'affixe $z_I = 1$, par A le point d'affixe $z_A = 1-2i$ et par B le point d'affixe $z_B = -2+2i$. On notera si besoin O l'origine du repère.

1. Déterminer le centre Ω et le rayon R du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.
2. Soit D le point d'affixe $z_D = \dfrac{3+9i}{4+2i}$. Donner la forme algébrique de cette affixe, et vérifier que D est un point du cercle $\mathcal{C}$.
3. Soit $M(a+ib)$ un point quelconque du plan complexe, déterminer à quelle condition le triangle ABM est rectangle en M. Reconnaitre l'ensemble obtenu. Pourquoi était-ce prévisible ?
4. On note E le point du cercle $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{I\Omega E} = \frac{\pi}{4}$ (angle orienté). Calculer l'affixe du point E.
5. Soit r l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $r(z) = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z + \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2}$.
   (a) Reconnaitre l'application r et donner ses éléments caractéristiques (sans faire de calcul).
   (b) Donner l'image par r du point K d'affixe $z_K = 2$.
   (c) Tracer une figure faisant apparaitre tous les points étudiés dans l'exercice, ainsi que le cercle $\mathcal{C}$.
   (d) Proposer une construction géométrique permettant de placer le point $r(K)$ sur cette figure sans calculer son affixe.

Exercice 3

Un groupe de 10 élèves de prépa, constitué de 4 garçons et 6 filles (ce ne sont probablement pas des élèves de PTSI) doivent se rendre à une soirée et disposent pour cela de deux voitures ayant chacune cinq places (deux à l'avant, trois à l'arrière dans chaque voiture). Les 10 places sont considérées comme étant toutes distinguables (ainsi, si on échange les occupants des deux voitures en les laissant « à la même place », on considèrera que le placement est différent). Les applications numériques ne sont bien sûr pas demandées.

1. Déterminer le nombre total de façons dont on peut asseoir les dix élèves.
2. Déterminer le nombre de façons différentes de remplir la première voiture, sans tenir compte de la deuxième (uniquement pour cette question).
3. Déterminer le nombre de répartitions possibles où tous les garçons se retrouvent dans la même voiture.
4. Déterminer le nombre de répartitions où il y a trois filles dans chaque voiture.
5. Déterminer le nombre de répartitions où toutes les filles sont à l'arrière des deux voitures.
6. Déterminer le nombre de répartitions où aucune paire de gaçons ou de filles ne se retrouve côte à côte (dans chaque voiture les deux passagers qui sont devant sont considérés comme côte à côte, et le passager du milieu à l'arrière est à côté des deux autres passagers arrière).
7. On suppose, uniquement pour cette dernière question, que seuls un garçon et trois filles dans le groupe ont le permis (ou, si vous préférez, que les élèves reviennent de leur soirée, et que six d'entre eux ont picolé suffisamment pour être interdits de volant). Reprendre l'ensemble des questions précédentes avec cette hypothèse supplémentaire (on supposera bien entendu qu'on mettra au volant de chaque voiture un élève ayant le permis).

Exercice 4

On s'intéresse dans cet exercice à l'application définie sur $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$ par $f(z) = \dfrac{z-2-i}{z+i}$.

1. Calculer les images par f de 1, de $3i$ et de $-1+2i$ (on exprimera ces images sous forme algébrique).
2. Calculer les antécédents éventuels par f de 0, de 1 et de $3-i$ (toujours sous forme algébrique).
3. Montrer que l'application f effectue une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$ vers $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, et donner une expression explicite de sa réciproque f^{-1}.
4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z invariants par l'application f.
5. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.
6. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$.
7. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$ (on peut représenter les ensembles des questions 5, 6 et 7 sur un même schéma).
8. Montrer que, si $z \in \mathbb{U}$, son image $f(z)$ appartient à une droite à préciser.
9. Montrer que l'image par f du cercle de centre $A(-i)$ et de rayon 1 est un cercle de centre $B(1)$ dont on précisera le centre et le rayon.