Devoir Surveillé n^o 3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

21 novembre 2020

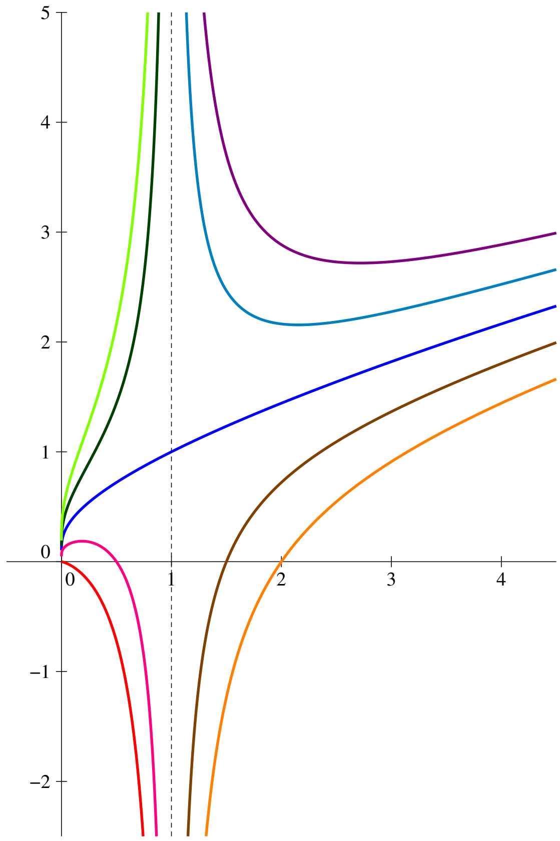
Exercice 1

1. Il faut commencer par « découper » la somme via une petite décomposition en éléments simples : comme $k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$, on peut écrire $\dfrac{1}{k^2-1} = \dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k-1}$. On peut utiliser les mêmes techniques que pour les calculs d'intégrale : on multiplie tout par $k-1$ puis on pose $k=1$ pour trouver $b = \dfrac{1}{2}$, et de même en multipliant par $k+1$ et en posant $k=-1$, on a $a = -\dfrac{1}{2}$. Reste donc à calculer $S_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1}$. On effectue un décalage d'indice dans une des deux sommes, voire même dans les deux pour créer un télescopage : $S_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+1} \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n-1} \dfrac{1}{k}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n-1} \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{2(n+1)}$. On obtient sans problème $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{3}{4}$.
2. On pose donc $t = \sqrt{x}$, ou $x = t^2$, ce qui implique que $dx = 2t\ dt$. Les bornes deviennent simplement 0 et π, donc $I = \displaystyle\int_0^\pi 2t\cos(t)\ dt$. Il est temps d'enchainer avec une IPP en posant $u(t) = 2t$, donc $u'(t) = 2$, et $v'(t) = \cos(t)$ qu'on peut intégrer en $v(t) = \sin(t)$. On obtient donc $I = [2t\sin(t)]_0^\pi - \displaystyle\int_0^\pi 2\sin(t)\ dt = 0 - [-2\cos(t)]_0^\pi = -2 - 2 = -4$.
3. On commence par normaliser l'équation pour la mettre sous la forme $y' + \dfrac{1}{x\ln(x)}y = \dfrac{1}{\ln(x)}$. Il y a deux intervalles de résolution envisageables : $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.
Commençons par résoudre sur $]1,+\infty[$: la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ y est continue et y admet pour primitive la fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$. Les solutions de l'équation homogène associée sont donc les fonctions de la forme $y_h(x) = Ke^{-\ln(\ln(x))} = \dfrac{K}{\ln(x)}$, avec $K \in \mathbb{R}$. Cherchons maintenant une solution particulière de l'équation complète en utilisant la méthode de variation de la constante et en posant donc $y_p(x) = \dfrac{K(x)}{\ln(x)}$, ce qui donne $y_p'(x) = \dfrac{K'(x)\ln(x) - \frac{K(x)}{x}}{\ln^2(x)}$. La fonction y_p est donc solution de l'équation complète si $\dfrac{K'(x)}{\ln(x)} - \dfrac{K(x)}{x\ln^2(x)} + \dfrac{1}{x\ln(x)} \times \dfrac{K(x)}{\ln(x)} = \dfrac{1}{\ln(x)}$, c'est-à-dire tout simplement si $K'(x) = 1$. On peut donc choisir $K(x) = x$, soit $y_p(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$. Toutes les fonctions solutions de l'équation sur l'intervalle $]1,+\infty[$ sont donc de la forme $y(x) = \dfrac{x+K}{\ln(x)}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
Sur l'intervalle $]0,1[$, il faudra changer la primitive dans le calcul des solutions de l'équation homogène en $\ln(-\ln(x))$, mais la formule obtenue à la fin reste la même en changeant le signe de la constante : $y_h(x) = \dfrac{L}{\ln(x)}$, avec $L \in \mathbb{R}$. La solution particulière obtenue sur l'autre

intervalle reste valable sur celui-ci, donc les solutions de l'équation complète restent de la forme $y(x) = \dfrac{x+L}{\ln(x)}$, avec $L \in \mathbb{R}$.

Pour obtenir une solution continue sur $]0,+\infty[$, il faudrait que $\dfrac{x+K}{\ln(x)}$ admette une limite finie quand x tend vers 1 (le problème sera le même à gauche et à droite). Dans la mesure où le dénominateur tend vers 0, cela nécessite que le numérateur aussi, et donc que $K=-1$ (et $L=-1$ de l'autre côté). Or, en posant $t=x-1$, on sait que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\ln(t+1)} = 1$ (ce quotient est l'inverse d'un taux d'accroissement classique dont la limite a été vue en cours). Cette limite étant valable des deux côtés, la fonction y définie par $y(x) = \dfrac{x-1}{\ln(x)}$ quand $x \neq 1$, et prolongée par $y(1)=1$ est donc une solution de l'équation définie et continue sur tout l'intervalle $]0,+\infty[$.

Ce n'était bien sûr pas demandé par l'énoncé, mais voici une allure de quelques courbes intégrales associées à cette équation différentielle :



4. La somme demandée vaut $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} 4i^2 - 4ij + j^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{2j(j+1)(2j+1)}{3} - 2j(j+1)\times j + j^3 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{3}j^3 + \frac{2}{3}j = \frac{n^2(n+1)^2}{12} + \frac{n(n+1)}{3} = \frac{n(n+1)(n^2+n+4)}{12}$, expression qui ne factorise pas plus. On peut par exemple vérifier que ça marche lorsque $n=2$: la formule donne $\dfrac{2\times 3\times 10}{12} = 5$, et la somme vaut bien $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 2} (2i-j)^2 = (2\times 1-1)^2 + (2\times 1-2)^2 + (2\times 2-2)^2 = 1+0+4 = 5$.

5. Un exemple classique d'intégrale de fraction rationnelle. Le dénominateur a pour discriminant $\Delta = 1+24 = 25$ et pour racines $x_1 = \dfrac{1-5}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{1+5}{2} = 3$. D'après le théorème de

décomposition en éléments simples, on peut donc écrire $\dfrac{x}{x^2-x-6} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{x-3}$, pour deux constantes a et b à déterminer. Une multiplication par $x+2$ suivie du choix de $x=-2$ donne $\dfrac{2}{5}$, et la multiplication par $x-3$ suivi du choix de $x=3$ donne de même $b=\dfrac{3}{5}$. Ne reste plus qu'à calculer $J = \dfrac{2}{5}\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{3}{5}\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+3}\,dx = \frac{2}{5}[\ln(x+2)]_{-1}^{1} + \frac{3}{5}[\ln(3-x)]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}\ln(3) + \frac{3}{5}(\ln(2)-\ln(4)) = \frac{2\ln(3)-3\ln(2)}{5}$ (valeur qui est très légèrement positive, ce qu'on peut d'ailleurs difficilement anticiper puisque la fonction change de signe en 0, au beau milieu de l'intervalle d'intégration)

6. Puisqu'on nous le demande, posons donc $t=\ln(x)$ et $y(x)=z(t)=z(\ln(x))$. On calcule très classiquement $y'(x) = \dfrac{z'(\ln(x))}{x}$, puis $y''(x) = \dfrac{z''(\ln(x)) - z'(\ln(x))}{x^2}$. On remplace ensuite dans l'équation pour trouver $z''(\ln(x)) - z'(\ln(x)) - 3z'(\ln(x)) + 4z(\ln(x)) = x$, soit $z''(t) - 4z'(t) + 4z(t) = e^t$.
   Incroyable mais vrai, nous savons maintenant résoudre cette équation. L'équation caractéristique associée r^2-4r+4 admet pour racine double $r=2$, les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme $z_h(t) = (A+Bt)e^{2t}$, avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$. On cherche une solution particulière sous la forme $z_p(t) = ae^t$, qui est égale à ses dérivées première et seconde, et sera donc solution si $ae^t - 4ae^t + 4ae^t = e^t$, donc tout bêtement si $a=1$. Les solutions de l'équation sont donc toutes les fonctions de la forme $z(t) = e^t + (A+Bt)e^{2t}$, avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$. Il ne reste plus qu'à remonter le changement de variables : les solutions de l'équation initiale sont de la forme $y(x) = z(\ln(x)) = x + (A+B\ln(x))e^{2\ln(x)}$, soit $y(x) = x + Ax^2 + Bx^2\ln(x)$, avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.
   La condition initiale $y(1)=3$ impose que $1+A=3$, soit $A=2$. De plus, $y'(x) = 1 + 2Ax + 2Bx\ln(x) + Bx$, donc $y'(1)=4$ se traduit par $1+2A+B=4$, soit $B=-1$. Finalement, l'unique solution au problème de Cauchy proposé est la fonction $y : x \mapsto x + 2x^2 - x^2\ln(x)$.

Exercice 2

1. (a) Il suffit de constater que $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} q^k = j \times q^k$ pour conclure (la somme intérieure est une somme de termes ne dépendant pas de la variable j).

   (b) On peut également écrire la somme sous la forme $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} q^k$ (puisque j variait entre 1 et k dans la première écriture sous forme de somme double, on doit retranscrire la condition $j \leqslant k$). Les indices de la somme géométrique intérieure n'étant pas très pratique, le mieux est de l'écrire comme une différence de deux sommes géométriques démarrant à l'indice 0 : $\displaystyle\sum_{k=j}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{j-1} q^k = \frac{1-q^{n-1}}{1-q} - \frac{1-q^j}{1-q} = \frac{q^j - q^{n+1}}{1-q}$. Il ne reste plus qu'à calculer la somme extérieure, qui va à nouveau nécessiter un calcul de somme géométrique (pour le terme dépendant de j) : $S_n = \displaystyle\frac{1}{1-q}\sum_{j=1}^{n}(q^j - q^{n+1}) = \frac{1}{1-q}\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} - 1 - nq^{n+1}\right) = \frac{1-(n+1)q^{n+1} - 1 + q + nq^{n+2}}{(1-q)^2}$, soit $S_n = \dfrac{q(1-(n+1)q^n + nq^{n+1})}{(1-q)^2}$.

2. (a) Il s'agit d'un simple décalage d'indice pour commencer : $qS_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kq^{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)q^k$.

On en déduit que $(1-q)S_n = S_n - qS_n = \sum_{k=1}^{n} kq^k - \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)q^k = q + \sum_{k=2}^{n} kq^k - \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)q^k - nq^{n+1}$. En regroupant et simplifiant les deux sommes ayant maintenant les mêmes indices, on trouve bien $S_n = q + \sum_{k=2}^{n} q^k - nq^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} q^k - nq^{n+1}$ (on peut réintégrer le terme de gauche à la somme).

(b) On peut continuer le calcul : $(1-q)S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} - 1 - nq^{n+1}$, et on achève exactement comme à la fin de la question 1.b puisqu'on a obtenu la même formule intermédiaire.

3. (a) Encore une application de la formule de somme géométrique : $f(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

(b) Le terme correspondant à $k=0$ est constant et disparait à la dérivation, on peut donc écrire $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$. Par ailleurs, en dérivant l'expression obtenue à la question précédente, $f'(x) = \dfrac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \dfrac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$. On en déduit que $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \dfrac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$.

(c) Il suffit de multiplier tout par x pour retrouver immédiatement $\sum_{k=1}^{n} kx^k = \dfrac{x(1-(n+1)x^n + nx^{n+1})}{(1-x)^2}$.

4. Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : $\sum_{k=1}^{n} kq^k = \dfrac{q(1-(n+1)q^n + nq^{n+1})}{(1-q)^2}$.

Initialisons par exemple au rang $n=1$, le membre de gauche vaut alors q et celui de droite $\dfrac{q(1-2q+q^2)}{(1-q)^2} = q$ après avoir reconnu au numérateur une identité remarquable correspondant exactement au dénominateur.

Supposons donc la formule vérifiée au rang n, et calculons $\sum_{k=1}^{n+1} kq^k = \sum_{k=1}^{n} kq^k + (n+1)q^{n+1}$, soit en appliquant l'hypothèse de récurrence $\sum_{k=1}^{n+1} kq^k = \dfrac{q(1-(n+1)q^n + nq^{n+1})}{(1-q)^2} + (n+1)q^{n+1} =$

$$\frac{q-(n+1)q^{n+1} + nq^{n+2} + (n+1)q^{n+1} - 2(n+1)q^{n+2} + (n+1)q^{n+3}}{(1-q)^2}$$

$= \dfrac{q-(n+2)q^{n+2} + (n+1)q^{n+3}}{(1-q)^2} = \dfrac{q(1-(n+2)q^{n+1} + (n+1)q^{n+2})}{(1-q)^2}$, soit exactement la formule souhaitée au rang $n+1$.

5. C'est vraiment une application toute bête : $\sum_{k=1}^{n} k3^k = \dfrac{3(1-(n+1)3^n + n3^{n+1})}{(1-3)^2}$

$= \dfrac{3-(n+1)3^n + 3n \times 3^n}{4} = \dfrac{3}{4} + (2n-1) \times \dfrac{3^n}{4}$.

Exercice 3

1. Il s'agit d'une équation linéaire homogène, mais dont les coefficients ne sont pas constants, on ne peut donc pas lui appliquer les méthodes vues en cours.
2. Si on pose $f(x) = ax + b$, on aura $f'(x) = a$ et $f''(x) = 0$, donc f est solution de (E) si $-ax(2+x) + (x+2)(ax+b) = 0$, soit $-2ax - ax^2 + ax^2 + 2ax + bx + 2b = 0$. Il suffit donc

d'imposer $b = 0$. La constante a peut prendre n'importe quelle valeur, par exemple $a = 1$, ce qui donne $f(x) = x$.

3. On commence par calculer $W'(x) = g'(x)h'(x) + g(x)h''(x) - g''(x)h(x) - g'(x)h'(x) = g(x)h''(x) - g''(x)h(x)$. Or, les fonctions g et h étant par hypothèse solutions de (E), elles vérifient $x^2g''(x) = x(2+x)g'(x) - (x+2)g(x)$ et $x^2h''(x) = x(2+x)h'(x) - (x+2)h(x)$. Quitte à tout multiplier par x^2, on a donc $x^2W'(x) = g(x)(x(2+x)h'(x) - (x+2)h(x)) - (x(2+x)g'(x) - (x+2)g(x))h(x) = x(2+x)(g(x)h'(x) - g'(x)h(x))$ (les autres termes se simplifient), soit $x^2W'(x) = x(2+x)W(x)$, et donc $W'(x) = \dfrac{2+x}{x}W(x)$.
4. La fonction W est donc solution de l'équation différentielle homogène du premier ordre $W' - \left(\dfrac{2}{x}+1\right)W = 0$. La fonction $x \mapsto -\dfrac{2}{x} - 1$ est continue sur $]0,+\infty[$ et y admet pour primitive $x \mapsto -2\ln(x) - x$, donc W est de la forme $W(x) = Ke^{2\ln(x)+x} = Kx^2e^x$, avec $K \in \mathbb{R}$.
5. En posant $h(x) = x$ (qui est solution de l'équation (E)) dans la définition de la fonction W, on constate que, si g est solution de (E), alors $g(x) - xg'(x) = Kx^2e^x$. Cherchons par exemple une fonction g vérifiant cette équation lorsque $K = -1$ (changer la valeur de K ne ferait que multiplier g par une constante). On normalise l'équation pour la mettre sous la forme $g'(x) - \dfrac{1}{x}g(x) = xe^x$. Les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $g_h(x) = Le^{\ln(x)} = Lx$, avec $L \in \mathbb{R}$. Par variation de la constante, on cherche une solution particulière sous la forme $g(x) = xL(x)$, ce qui impose $g'(x) = xL'(x) + L(x)$. La fonction g est alors solution de l'équation si $xL'(x) + L(x) - L(x) = xe^x$, donc si $L'(x) = e^x$. On peut donc choisir $L(x) = e^x$, soit $g(x) = xe^x$.
   Vérifions : $g'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$, puis $g''(x) = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$, donc $x^2g''(x) - x(2+x)g'(x) + (x+2)g(x) = (2x^2+x^3)e^x - (2x+x^2)(1+x)e^x + (x^2+2x)e^x = e^x(2x^2+x^3-2x-3x^2-x^3+x^2+2x) = 0$. La fonction g est bien solution de l'équation (E).
6. Les solutions de (E) sont donc de la forme $y(x) = Ax + Bxe^x$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$, et vérifient donc $y'(x) = A + (B+Bx)e^x$. Les conditions $y_0(1) = 2 - e$ et $y_0'(1) = 2 - 2e$ imposent donc $A + Be = 2 - e$ et $A + 2Be = 2 - 2e$, ce qui est vérifié pour $A = 2$ et $B = -1$. La solution recherchée est donc définie par $y_0(x) = 2x - xe^x$.
7. Calculons donc $I = \displaystyle\int_0^1 2x - xe^x\, dx = [x^2]_0^1 - \int_0^1 xe^x\, dx = 1 - \int_0^1 xe^x\, dx$. Il est temps de recourir à une IPP en posant $u(x) = x$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$ qu'on peut intégrer en $v(x) = e^x$. Ces fonctions sont bien sûr de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0,1]$, donc $I = 1 - [xe^x]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 e^x\, dx = 1 - e + [e^x]_0^1 = 1 - e + e - 1 = 0$.
8. En Scrabble français, et en supposant que le mot ne rapporte aucun bonus, il rapporterait 27 points (10 pour le W et le K, un seul point pour chacune des sept lettres restantes).

Exercice 4

1. On calcule donc $S_0 = 1$ (il n'y a qu'un terme dans la somme) puis $S_1 = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$; $S_5 = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{13}{15}$ et enfin $S_4 = \dfrac{13}{15} - \dfrac{1}{7} = \dfrac{76}{105}$.
2. On obtient facilement $S_{n+2} - S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+2} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} + \frac{(-1)n+2}{2n+5}$. Si n est un entier pair, $n+2$ est pair, et $n+1$ impair, donc $S_{n+2} - S_n = \dfrac{1}{2n+5} - \dfrac{1}{2n+3} = -\dfrac{2}{(2n+5)(2n+3)} < 0$. Au contraire, si n est impair, les signes sont inversés et $S_{n+2} - S_n =$

$\dfrac{2}{(2n+5)(2n+3)} > 0.$

3. Il s'agit d'une somme géométrique de raison $-t^2$, qui vaut donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-t^2)^k = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} = \frac{1+(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}$.
La déduction est immédiate, il suffit de mettre une intégrale autour de l'égalité précédente (l'intégrale d'une somme étant égale à la somme des intégrales, propriété connue sous la nom de linéarité de l'intégrale).

4. Sans difficulté, $\displaystyle\int_0^1 (-1)^k t^{2k}\, dt = (-1)^k \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 = \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
La somme obtenue comme membre de gauche de l'égalité précédente est donc exactement égale à S_n, d'où $S_n = \int_0^1 \dfrac{1}{1+t^2}\, dt + (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$.

5. C'est absolument trivial : $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$ et $t^{2n+2} \geqslant 0$, l'inégalité en découle immédiatement. En utilisant le théorème donné en indication, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \leqslant \int_0^1 t^{2n+2}\, dt = \left[\frac{t^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+3}$. Comme par ailleurs $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \geqslant 0$ (on intègre une fonction qui est toujours positive sur l'intervalle $[0,1]$), le théorème des gendarmes permet de conclure que la limite demandée est simplement égale à 0.

6. La multiplication par $(-1)^n$ ne changeant évidemment pas la nullité de la limite précédent, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

7. La question 4 a permis de prouver que $S_n = l + (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$. L'intégrale étant positive, le signe de $S_n - l$ est donc le même que celui de $(-1)^n$. Tous les termes d'indices pairs de la suite sont donc bien supérieurs à l, et tous ceux d'indice impair sont inférieurs à l.

8. Puisque $\dfrac{\pi}{4}$ est compris entre S_{2n} et S_{2n+1}, ces deux nombres forment une valeur approchée de $\dfrac{\pi}{4}$ avec une erreur maximale égale à $S_{2n} - S_{2n+1}$, c'est-à-dire égale à $\dfrac{1}{4n+3}$ (valeur absolue du terme numéro $2n+1$ de la somme). Il nous faut obtenir une valeur approchée de $\dfrac{\pi}{4}$ à 0.00025 près (l'erreur sera multipliée par 4 pour obtenir la valeur approchée de π), ce qui sera le cas lorsque $\dfrac{1}{4n+3} \leqslant \dfrac{1}{4\ 000}$, donc $4n+3 \geqslant 4\ 000$, soit $n \geqslant 1\ 000$. On peut donc prendre $4 \times S_{2000}$ comme valeur approchée par excès, ou $4 \times S_{2001}$ par défaut, pour être sûr d'avoir une précision de 10^{-3}. En pratique, $4 \times S_{2\ 000} \simeq 3.14209$ et $4 \times S_{2\ 001} \simeq 3.14109$.