

AP n° 9 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

12 mars 2021

Pour s'échauffer

1. Le polynôme dérivé $P' = 3X^2 - 2X - \frac{39}{4}$ admet pour discriminant $\Delta = 4 + 3 \times 39 = 121 = 11^2$, et pour racines $X_1 = \frac{2-11}{6} = -\frac{3}{2}$ et $X_2 = \frac{2+11}{6} = \frac{13}{6}$. On va plutôt tester la première pour commencer : $P\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} - \frac{9}{4} + \frac{117}{8} - 9 = \frac{-27-18+117-72}{8} = 0$, donc $-\frac{3}{2}$ est bien notre racine double. Le polynôme P étant de degré 3, il admet une autre racine qu'on peut déterminer à l'aide des relations coefficients-racines : la somme des trois racines (en comptant deux fois la racine double) est égale à $-(-1) = 1$, donc la troisième racine vaut $1 + 2 \times \frac{3}{2} = 4$, et le polynôme P étant unitaire, il se factorise sous la forme $P = \left(X + \frac{3}{2}\right)^2 (X - 4)$.
2. Notons $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ le polynôme unitaire de degré 3 ayant pour racines les nombres x , y et z . En exploitant les relations coefficients-racines, on sait que $a = -(x + y + z) = -2$ et $c = -xyz = \frac{1}{2}$. Enfin, on a $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + xz + yz}{xyz} = -\frac{b}{c}$, donc $b = -\frac{c}{2} = -\frac{1}{4}$, et $P = X^3 - 2X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{1}{2}$. Ce polynôme admet pour racine évidente $X = 2$: $P(2) = 8 - 8 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$. Même pas besoin de calculs pour le factoriser sous la forme $P = X(X - 2) - \frac{1}{4}(X - 2) = (X - 2)\left(X^2 - \frac{1}{4}\right) = (X - 2)\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2}\right)$. On a donc trouvé les trois racines du polynôme P et donc les valeurs de nos trois inconnues, qui peuvent toutefois être permutées indifféremment. On en déduit que $\mathcal{S} = \left\{\left(2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \left(2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right); \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)\right\}$

Une suite de polynômes.

1. Calculons bêtement $P_1 = 2X \times 1 - (1 + X^2) \times 0 = 2X$, puis $P_2 = 2X \times 2X - \frac{1}{2}(1 + X^2) \times 2 = 4X^2 - 1 - X^2 = 3X^2 - 1$.
2. Montrons par récurrence les deux propriétés d'un coup. Elles sont vraies au rang 0 (on a bien $a_1 = 2 = \frac{2}{1} \times a_0$). Supposons-les vraies au rang n , le terme dominant de P_n est donc $a_n X^n$, et celui de P'_n sera $na_n X^{n-1}$. Le terme dominant de plus haut degré théorique (s'il ne s'annule pas) de P_{n+1} est alors $2X \times a_n X^n - \frac{1}{n+1} X^2 \times na_n X^{n-1} = \left(2 - \frac{n}{n+1}\right) a_n X^{n+1} = \frac{n+2}{n+1} a_n X^{n+1}$. Le coefficient n'étant pas nul (puisque $a_n \neq 0$ par hypothèse de récurrence), notre polynôme est bien de degré n , et on a prouvé en passant la relation $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} a_n$.

On en déduit que $a_n = n + 1$, ce qu'on prouve par récurrence si on est sérieux : $a_0 = 1$ c'est bon, et si $a_n = n + 1$, alors $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \times (n+1) = n+2$, ce qui prouve l'hérédité.

3. Et si on faisait une petite récurrence ? Au rang 0, on a bien $P_0(-X) = P_0(X)$ puisque le polynôme est constant. Si on suppose que $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$, alors $P'_n(-X) = (-1)^{n+1} P'_n(X)$, et $P_{n+1}(-X) = -2XP_n(-X) - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P'_n(-X) = (-1)^{n+1} \times 2XP_n(X) - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}(1+X^2)P'_n(X) = (-1)^{n+1} P_{n+1}(X)$, ce qu'on voulait prouver. Les polynômes P_n ont donc une parité qui est celle de l'entier n .
4. (a) Oh ben tiens, une idée originale, je propose de faire une récurrence ! Au rang 1, $P'_1 = 2 = 2P_0$ donc la propriété est vraie (techniquement, on peut même initialiser pour $n = 0$). Supposons donc que $P'_n = (n+1)P_{n-1}$, ce qui implique que $P_{n+1} = 2XP_n - (1+X^2)P'_{n-1}$. Dérivons donc cette égalité : $P'_{n+1} = 2P_n + 2XP'_n - 2XP'_{n-1} - (1+X^2)P'_{n-1}$. On remplace à nouveau le terme en P'_n (en utilisant l'hypothèse de récurrence) pour obtenir $P'_{n+1} = 2P_n + 2(n+1)XP_{n-1} - 2XP'_{n-1} - (1+X^2)P'_{n-1} = 2P_n + 2nXP_{n-1} - (1+X^2)P'_{n-1}$. Or, en décalant la relation de récurrence définissant la suite, on a $P_n = 2XP_{n-1} - \frac{1}{n}(1+X^2)P'_{n-1}$. Quitte à multiplier par n , on a donc $2nXP_{n-1} - (1+X^2)P'_{n-1} = nP_n$, et $P'_{n+1} = 2P_n + nP_n = (n+2)P_n$, ce qui prouve l'hérédité de notre récurrence.
 - (b) En remplaçant X par 0 dans la récurrence définissant la suite, on a $P_{n+1}(0) = -\frac{1}{n+1}P'_n(0) = -P_{n-1}(0)$ puisque $P'_n = (n+1)P_{n-1}$. Comme $P_1(0) = 0$, une récurrence immédiate permet de prouver que, pour tout entier $n = 2p+1$ impair, on a $P_{2p+1}(0) = 0$. Par contre, comme $P_0(0) = 1$, on aura $P_{2p}(0) = (-1)^p$ (là encore, une récurrence facile si on veut être rigoureux : $P_0(0) = 1$ comme on vient de le dire, et $P_{2p}(0) = (-1)^p \Rightarrow P_{2(p+1)}(0) = P_{2p+2}(0) = -P_{2p}(0) = (-1)^{p+1}$).
 - (c) C'est immédiat : d'après la question a, $P'_{n+1} = (n+2)P_n$, donc $(n+2) \int_0^x P_n(t) dt = \int_0^x P'_{n+1}(t) dt = P_{n+1}(x) - P_{n+1}(0)$.
 - (d) On sait que $P_3(0) = 0$, donc $P_3(x) = 4 \int_0^x P_2(t) dt = 4 \int_0^x (3t^2 - 1) dt = 4[t^3 - t]_0^x = 4x^3 - 4x$. De même, on sait que $P_4(0) = 1$, donc $P_4(x) = 1 + 5 \int_0^x P_4(t) dt = 1 + 5 \int_0^x (4t^3 - 4t) dt = 1 + 5[t^4 - 2t^2]_0^x = 5x^4 - 10x^2 + 1$.
5. (a) Par définition, $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - \frac{1}{n+2}(1+X^2)P'_{n+1}$. Or, on sait que $\frac{1}{n+2}P'_{n+1} = P_n$ (question 4a), donc $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - (1+X^2)P_n$, ce qui est bien la relation demandée.
 - (b) À x fixé, la suite $(P_n(x))$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'après la question précédente. L'équation caractéristique correspondante (dont on notera la variable a pour éviter les confusions) est $a^2 - 2ax + (1+x^2) = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 4x^2 - 4(1+x^2) = -4$, qui est évidemment strictement négatif. Les racines de l'équation sont $a_1 = \frac{2x+2i}{2} = x+i$, et $a_2 = \frac{2x-2i}{2} = x-i$. Comme le module et l'argument de ces nombres complexes vont être impossibles à exprimer simplement, on va se contenter de l'expression complexe (vu ce qui nous est demandé à la question suivante, c'est de toute façon très bien). On en déduit donc qu'il existe deux constantes (complexes) A et B telles que $P_n(x) = A(x+i)^n + B(x-i)^n$. Les conditions initiales donnent $P_0(x) = 1 = A+B$ et $P_1(x) = 2x = (x+i)A + (x-i)B$. Comme $B = 1-A$, on a donc $2x = (x+i)A + x - i - (x-i)A$, soit $x+i = 2iA$ et donc $A = \frac{x+i}{2i}$. On en déduit $B = 1-A = \frac{i-x}{2i}$, soit $P_n(x) = \frac{(x+i)^{n+1}}{2i} - \frac{(x-i)^{n+1}}{2i}$.

(c) Ah ben oui ça ne va pas être difficile ! D'après la question précédente, P_n coïncide avec le polynôme $\frac{1}{2i}((X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1})$ sur $\mathbb{R}$ qui est un ensemble infini, donc les deux polynômes sont égaux (c'est le principe d'identification des coefficients si on veut faire savant).

6. Le nombre i ne pouvant pas être racine de P_n (puisque $P_n(i) = (2i)^n \neq 0$), x est racine de P_n si et seulement si $\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{n+1} = 1$. En posant $z = \frac{x+i}{x-i}$, z est donc une racine $(n+1)$ -ème de l'unité, et $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}$, avec $k \in \{0, \dots, n\}$. Si $z = \frac{x+i}{x-i}$, alors $zx - iz = x + i$, donc $x(z-1) = i(z+1)$, et $x = \frac{i(z+1)}{z-1}$, à condition bien entendu que $z \neq 1$. On supprime donc la valeur de z obtenue précédemment lorsque $k = 0$, et on trouve n valeurs pour x , égales à $x_k = \frac{i(e^{i\frac{2k\pi}{n+1}} + 1)}{e^{i\frac{2k\pi}{n+1}} - 1}$. On a bien évidemment très envie de factoriser en haut et en bas

par l'angle moitié : $x_k = \frac{ie^{\frac{ik\pi}{n+1}}(e^{i\frac{k\pi}{n+1}} + e^{i\frac{-k\pi}{n+1}})}{e^{i\frac{k\pi}{n+1}}(e^{i\frac{k\pi}{n+1}} + e^{i\frac{-k\pi}{n+1}})} = \frac{2i \cos(\frac{k\pi}{n+1})}{2i \sin(\frac{k\pi}{n+1})} = \frac{1}{\tan(\frac{k\pi}{n+1})}$ (attention tout

de même, si $n+1$ est pair, on ne peut pas écrire la solution correspondant à $k = \frac{n+1}{2}$, qui vaut tout bêtement 0, sous forme d'une inverse de tangente). Ces valeurs sont toutes distinctes (les angles dont on prend les tangentes appartiennent tous à $]0, \pi[$, intervalle sur lequel la fonction $\tan$ est injective), donc on a obtenu n racines distinctes (et réelles !) du polynôme P_n . Comme celui-ci est de degré n , on les a toutes. Il ne faut pas oublier que le polynôme P_n a un coefficient dominant égal à $n+1$ avant d'écrire la factorisation : $P_n = (n+1) \prod_{k=1}^n \left(X - \frac{1}{\tan(\frac{k\pi}{n+1})} \right)$ dans le cas où n est un entier pair (puisque alors $n+1$ est impair),

et $P_n = (n+1)X \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(X - \frac{1}{\tan(\frac{k\pi}{n+1})} \right) \prod_{k=\frac{n+3}{2}}^n \left(X - \frac{1}{\tan(\frac{k\pi}{n+1})} \right)$ quand n est impair (si on tient vraiment à faire apparaître les tangentes).

7. Les relations coefficients-racines nous assurent que la somme des racines de P_n est égale à $-\frac{b_{n-1}}{a_n}$, où $a_n = n+1$ est le coefficient dominant de P_n calculé plus haut, et b_{n-1} est le coefficient de degré $n-1$ du même polynôme P_n . En reprenant l'expression explicite de P_n et en développant brutalement à coups de binôme de Newton, on a $b_{n-1} = \frac{1}{2i} \left(\binom{n+1}{n-1} i^2 - \binom{n+1}{n-1} (-i)^2 \right) = 0$. En fait, il n'y a rien de surprenant là-dedans, on peut remarquer à l'aide de l'expression explicite des racines qu'elles sont opposées deux à deux (sauf la racine nulle dans le cas où n est impair). On peut aussi utiliser le fait que P_n est pair ou impair, ce qui assure que, si α est racine réelle de P_n , alors $-\alpha$ aussi. Comme le polynôme n'a que des racines réelles simples, cela assure que leur somme est nulle.

Pour le produit, les relations coefficients-racines nous assurent qu'il est égal à $\frac{(-1)^n b_0}{n+1}$, où b_0 est le coefficient constant de P_n . Or, ce coefficient constant est égal à $P_n(0)$. Lorsque n est impair, le produit est donc nul, ce qui n'a rien de surprenant puisque dans ce cas 0 est effectivement racine du polynôme P_n ! Lorsque n est pair, $(-1)^n = 1$, et on a donc un produit des racines égal à $\frac{(-1)^p}{2p+1}$, en ayant posé $n = 2p$.

Des suites d'intégrales.

1. En fait $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ ne se calcule effectivement pas facilement du tout, sauf si on connaît la réciproque Argsh de la fonction sh (ce qui n'est a priori pas votre cas)! On peut retrouver ce résultat en effectuant dans l'intégrale le changement de variable $x = \text{sh}(t)$: on a alors $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\text{sh}^2(t)} = \sqrt{\text{ch}^2(t)} = \text{ch}(t)$ (en utilisant la formule $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$). Or on aura dans ce cas $dx = \text{ch}(t) dt$, numérateur et dénominateur se simplifient donc et on a bêtement $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_\alpha^\beta 1 dt$. Il reste à calculer les nouvelles bornes de l'intégrale après changement de variable : lorsque $x = 0$, $t = 0$ puisque $\text{sh}(0) = 0$, donc $\alpha = 0$. Lorsque $x = 1$, t est solution de l'équation $\text{sh}(t) = 1$, soit $e^t - e^{-t} = 2$. Quitte à tout multiplier par e^t , on a donc $e^{2t} - 2e^t - 1 = 0$, ce qui est une équation du second degré déguisée. On pose $X = e^t$ pour obtenir $X^2 - 2X - 1$, équation dont le discriminant vaut $\Delta = 4 + 4 = 8$, et qui admet pour racines $X_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} < 0$ et $X_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} > 0$. On ne garde que la solution positive X_2 , qui conduit à $\beta = \ln(1 + \sqrt{2})$. Finalement, $I_0 = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} 1 dt = \ln(1 + \sqrt{2})$. Les plus courageux vérifieront que la fonction $x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (et la réciproque de la fonction sh), résultat qu'on retrouve d'ailleurs par le changement de variable effectué plus haut (mais appliqué à une intégrale sans bornes).

Beaucoup moins de problèmes pour le calcul suivant : $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = [\sqrt{1+x^2}]_0^1 = \sqrt{2} - 1$.

Pour le calcul de $I_3 = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$, il est malin de poser $u'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ pour obtenir $u(x) = \sqrt{1+x^2}$, et donc $v(x) = x^2$ qui donne $v'(x) = 2x$. On trouve alors $I_3 = [x^2\sqrt{1+x^2}]_0^1 - \int_0^1 2x\sqrt{1+x^2} dx = \sqrt{2} - \left[\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$.

2. Calculons donc $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$. Le numérateur du quotient sous l'intégrale étant toujours négatif sur $[0, 1]$, on en déduit que $I_{n+1} - I_n \leq 0$, donc la suite est décroissante. De plus, on a toujours $I_n \geq 0$ (on intègre une fonction positive), et par ailleurs, $\forall x \in [0, 1]$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$, donc $I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$. Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que $\lim I_n = 0$.
3. C'est immédiat : $I_n + I_{n-2} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x^{n-2}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx = J_n$.
4. Partons de I_n et effectuons le même type d'IPP que pour le calcul de I_3 : on pose $u'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, ce qui mène à $u(x) = \sqrt{1+x^2}$, et $v(x) = x^{n-1}$ qui donne $v'(x) = (n-1)x^{n-2}$. On peut alors écrire $I_n = [x^{n-1}\sqrt{1+x^2}]_0^1 - \int_0^1 (n-1)x^{n-2}\sqrt{1+x^2} dx = \sqrt{2} - (n-1)J_n$. En remplaçant J_n par $I_n + I_{n-2}$ (résultat de la question précédente) et en passant tout à gauche, on se rend compte qu'il y avait une erreur d'énoncé et que la relation est en fait $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$.
5. La suite (I_n) étant décroissante, on peut certainement écrire que $I_{n-2} \geq I_n$, donc $nI_{n-2} \geq nI_n$ et $(2n-1)I_{n-2} \geq nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$. Quitte à décaler la valeur de n , $(2(n+2)-1)I_n \geq \sqrt{2}$, soit $(2n+3)I_n \geq \sqrt{2}$. De même, $\sqrt{2} = nI_n + (n-1)I_{n-2} \geq (2n-1)I_n$. On peut en déduire par exemple l'encadrement $\sqrt{2} - 3I_n \leq 2nI_n \leq \sqrt{2} + I_n$. Comme on sait que $\lim I_n = 0$,

le théorème des gendarmes permet alors de conclure que $\lim 2nI_n = \sqrt{2}$, c'est-à-dire que $I_n \sim \frac{\sqrt{2}}{2n}$.