AP : Séance n° 7

PTSI B Lycée Eiffel

15 janvier 2021

Quelques exercices indépendants sur les suites.

1. On définit une suite (u_n) par les conditions $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$. Calculer u_n en fonction de n.
2. On définit une suite (u_n) par les conditions $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{\dfrac{u_{n+1}^9}{u_n^4}}$. Calculer u_n en fonction de n.
3. On définit une suite (u_n) par $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ent}(kx)$ (où x est un réel non nul fixé). Prouver la convergence de la suite (u_n) et calculer sa limite.
4. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En notant l leur limite commune, montrer que $1 - 2\sqrt{2} \leqslant l \leqslant 1$, puis déterminer une valeur de n pour laquelle u_n est une valeur approchée de n à 10^{-2} près (sans chercher à calculer u_n !).

Des histoires de matrices.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $(P - I_3)^3 - 2P$. En déduire que P est inversible, et déterminer P^{-1}.
3. Comparer les matrices AP et PT.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$. Cette formule reste-t-elle valable pour $n = -1$?
5. Montrer que, pour tout entier naturel n, T^n est de la forme $T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & u_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, et déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n). De quel type de suite s'agit-il ?
6. On pose $J = T - 2I_3$. Calculer les premières puissances de J (jusqu'à J^3), puis déterminer J^k pour tout entier k.
7. En déduire une expression détaillée de T^n, puis de A^n.
8. Une application des résultats précédents : le calcul du commutant de A.
   (a) Montrer qu'une matrice M commute avec A si et seulement si $P^{-1}MP$ commute avec T.
   (b) Déterminer toutes les matrices commutant avec la matrice T.
   (c) En déduire l'ensemble des matrices commutant avec la matrice A.