AP : Séance n$^{\text{o}}$ 5

PTSI B Lycée Eiffel

27 novembre 2020

Pour ne pas perdre la main sur les équations différentielles.

Résoudre les équations suivantes :

1. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2t}}{t^2}$ (on posera $z(t) = y(t)e^{-2t}$).
2. $y'' - 2y' + 2y = \cos^2(t)$.

Une équation du deuxième ordre à résoudre en deux temps.

On considère dans cet exercice l'équation différentielle (E) : $x^2y'' - xy' + y = x^3$.

1. Résoudre sur l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation du premier ordre $xz' - z = x^3$.
2. Soit y une fonction solution de l'équation (E). En posant $z = xy' - y$, montrer que z est solution de l'équation résolue à la question précédente.
3. En déduire les solutions de l'équation (E) sur $]0, +\infty[$.
4. Que se passe-t-il si on souhaite résoudre sur $]-\infty, 0[$? Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ?
5. Résoudre à nouveau l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$, mais cette fois en effectuant le changement de variable $t = \ln(x)$.

Quelques exercices sur les complexes.

1. Déterminer l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $\left|\dfrac{z-1}{z+i}\right| = 2$.
2. Idem pour la condition $\arg\left(\dfrac{z-1}{z+i}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.
3. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $z^4 - (3+8i)z^2 - 16 + 12i = 0$.
   (b) $z^3 - i = 6(z+i)$.
   (c) $z^4 = z + \overline{z}$.
4. Soient A, B et C trois points d'affixes respectives a, b et c, montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$ ou $A + jc + j^2b = 0$ (où on a noté $e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$).
5. Soit $ABCDEFG$ un heptagone régulier, montrer que $\dfrac{1}{AB} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD}$.