

AP : Séance n° 3

PTSI B Lycée Eiffel

2 octobre 2020

Pour s'échauffer, quelques résolutions d'équations.

1. On se contente ici d'écrire que $5x \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ ou $5x \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$, ce qui après une brillante division par 5 donne les solutions $x \equiv \pm \frac{\pi}{30} \left[\frac{2\pi}{5} \right]$.
2. On effectue le changement de variable $X = e^x$, et l'équation devient $X + \frac{e}{X} = e - 1$, soit $X^2 + (1 - e)X + e = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = (1 - e)^2 - 4e = 1 - 6e + e^2 < 0$. Il n'y a pas de solution réelle à l'équation : $\mathcal{S} = \emptyset$. Oui, je sais, c'est très décevant, l'équation est plus intéressante avec $e + 1$ comme membre de droite.
3. On peut commencer par regrouper et factoriser : $2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}$, soit $2^{2x-1}(2+1) = 3^{x-\frac{1}{2}}(3+1)$, donc $3 \times 2^{2x-1} = 4 \times 3^{x-\frac{1}{2}}$. Il est temps de passer au $\ln$ des deux côtés, pour obtenir $\ln(3) + (2x - 1)\ln(2) = 2\ln(2) + \left(x - \frac{1}{2}\right)\ln(3)$. En regroupant, $x(2\ln(2) - \ln(3)) = 2\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(3) - \ln(3) + \ln(2) = 3\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(3)$. On trouve donc comme unique solution $x = \frac{3\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(3)}{2\ln(2) - \ln(3)}$, soit tout bêtement $x = \frac{3}{2}$. Concluons correctement : $\mathcal{S} = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$.
4. Un classique, on écrit tout avec des exponentielles (en multipliant par 2 au passage) : $7(e^x + e^{-x}) + 2(e^x - e^{-x}) - 18 = 0$, soit $9e^x + 5e^{-x} - 18 = 0$. On multiplie ensuite tout par e^x et on pose $X = e^x$ pour trouver l'équation du second degré $9X^2 - 18X + 5 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 18^2 - 9 \times 20 = 9 \times 36 - 9 \times 20 = 9 \times 16$. On a donc $\sqrt{\Delta} = 12$, et les racines du trinôme sont $X_1 = \frac{18 - 12}{18} = \frac{1}{3}$, et $X_2 = \frac{18 + 12}{18} = \frac{5}{3}$. Les deux racines sont positives, et on trouve donc $\mathcal{S} = \{-\ln(3), \ln(5) - \ln(3)\}$.
5. Un peu d'astuce est nécessaire pour résoudre celle-ci, on peut élever au carré (mais attention, l'équation obtenue ne sera sûrement pas équivalente à l'équation initiale !) pour obtenir $\sin^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) = 1$. Comme on sait bien que $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, il ne reste plus que la condition $\sin(x)\cos(x) = 0$. La valeur du sinus ou celle du cosinus doit être nulle, on est donc à l'un des « sommets » du cercle trigonométrique, soit $x \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2} \right]$. Parmi ces valeurs, il ne faut garder que $x \equiv 0[2\pi]$ et $x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, pour les autres on a $\sin(x) + \cos(x) = -1$.
6. La définition de la partie entière permet d'écrire notre équation sous la forme équivalente $2 \leq \sqrt{x^2 + 1} < 3$. Comme tout est strictement positif, on peut élever au carré : $4 \leq x^2 + 1 < 9$, puis $3 \leq x^2 < 8$. Attention à la dernière étape, x n'a lui aucune raison d'être positif, il y a donc deux intervalles de solutions : $\mathcal{S} =]-2\sqrt{2}, -\sqrt{3}] \cup [3, 2\sqrt{2}[$.
7. L'équation de l'énoncé initial n'ayant aucun intérêt (on ne sait pas résoudre l'équation du troisième degré à laquelle on aboutit), remplaçons donc le membre de droite par -1 . On bourrine ensuite joyeusement à coups de formules de duplication et de triplication : $\cos(x) + \cos(2x) - 3\cos(3x) = \cos(x) + 2\cos^2(x) - 1 - 3(4\cos^3(x) - 3\cos(x)) = -12\cos^3(x) + 2\cos^2(x) + 10\cos(x) - 1$. En posant $X = \cos(x)$ (et en changeant les signes), notre équation initiale se

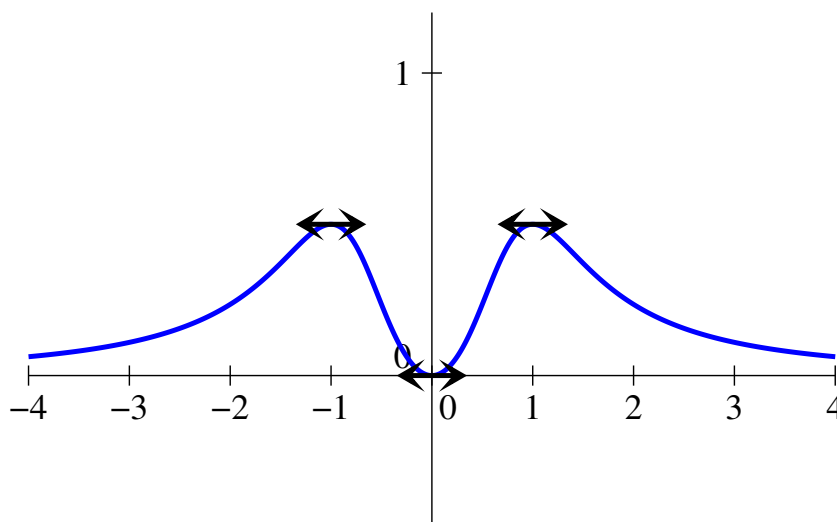
ramène donc à $12X^3 - 2X^2 - 10X^2 = 0$? On peut tout diviser par 2 et factoriser par X : $X(6X^2 - X - 5) = 0$. Comme 1 est racine évidente du trinôme restant, même pas besoin de calculer un discriminant, la deuxième racine vaut $-\frac{5}{6}$. On est donc ramenés aux trois possibilités suivantes : $\cos(x) = 0$, donc $x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$; $\cos(x) = 1$ donc $x \equiv 0[2\pi]$; ou enfin $\cos(x) = -\frac{5}{6}$, soit $x \equiv \pm \arccos\left(-\frac{5}{6}\right)[2\pi]$ (valeur qu'on ne peut bien sûr pas expliciter plus que ça).

Quelques études de fonctions.

- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur est toujours strictement positif) et paire. La comparaison des termes de plus haut degré suffit à affirmer que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Enfin, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = \frac{2x(1+x^4) - 4x^3 \times x^2}{(x^4+1)^2} = \frac{2x - 2x^5}{(x^4+1)^2} = \frac{2x(1-x^4)}{(x^4+1)^2} = \frac{2x(1-x^2)(1+x^2)}{(1+x^4)^2}$. La dérivée s'annule donc trois fois (en changeant de signe à chaque fois), on peut tout de suite calculer les valeurs importantes $f(0) = 0$ et $f(1) = f(-1) = \frac{1}{2}$. Le tableau de variations complet de la fonction :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$1-x^2$	$-$	0	$+$	$+$	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
f	0	$\nearrow \frac{1}{2}$	$\searrow 0$	$\nearrow \frac{1}{2}$	$\searrow 0$

Et une petite allure de courbe, bien entendu :

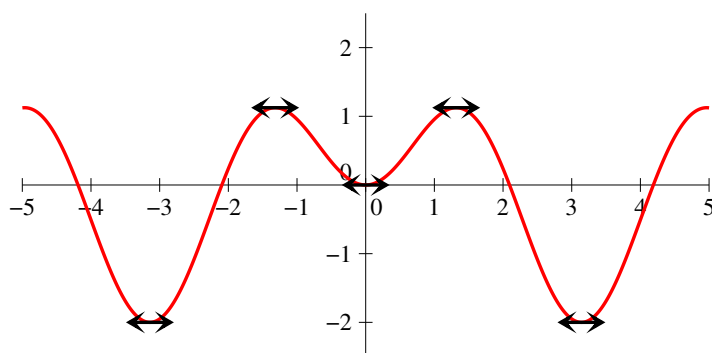


- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, paire et 2π -périodique, on peut se contenter de l'étudier sur $[0, \pi]$. Elle est dérivable sur cet intervalle, de dérivée $f'(x) = -\sin(x) + 2\sin(2x) = \sin(x)(4\cos(x) - 1)$ en utilisant la formule de duplication du sinus. Cette dérivée s'annule (sur notre intervalle d'étude) et 0 et en π , mais aussi en $\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$, qui est un angle appartenant

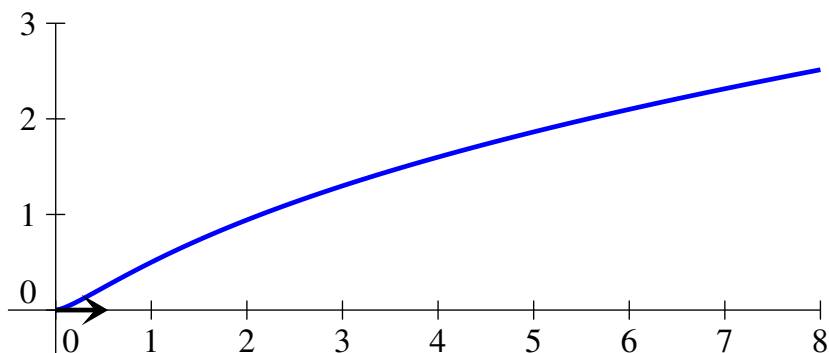
à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (on ne peut pas dire beaucoup mieux, si ce n'est qu'il est compris entre $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$) que l'on notera θ . On calcule $f(0) = 1 - 1 = 0$; $f(\pi) = -1 - 1 = -2$, et si on est courageux $f(\theta) = \cos(\theta) - (2\cos^2(\theta) - 1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + 1 = \frac{9}{8}$, pour dresser le tableau de variations suivant :

x	0	θ	π
f	0	$\frac{9}{8}$	-2

Si on veut compléter un peu l'étude, on peut s'intéresser au signe de f sur $[0, \pi]$: f s'annule lorsque $\cos(x) = \cos(2x)$, soit $x \equiv 0[2\pi]$, ou $2x \equiv -x[2\pi]$, ce qui donne la valeur d'annulation supplémentaire $x = \frac{2\pi}{3}$.



- La fonction f est définie sur $[0, +\infty[$, vérifie $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (si on n'est pas convaincu, on factorise par x le dénominateur). Il ne reste plus qu'à étudier les variations en calculant la dérivée (la fonction ne sera pas dérivable en 0), pour laquelle on pourra bien sûr écrire le numérateur sous la forme $x^{\frac{3}{2}}$: $f'(x) = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(1+x) - x\sqrt{x}}{(1+x)^2} = \frac{\sqrt{x}(3+x)}{2(1+x)^2}$. Cette dérivée est du signe de $3+x$ donc toujours positive sur l'intervalle de définition de f . Il n'y aura donc vraiment rien à signaler sur la courbe si on ne fait pas au moins l'effort de constater que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$, ce qui prouve que f est en fait dérivable en 0 et qu'on aura à cet endroit une tangente horizontale. Voici la passionnante courbe :



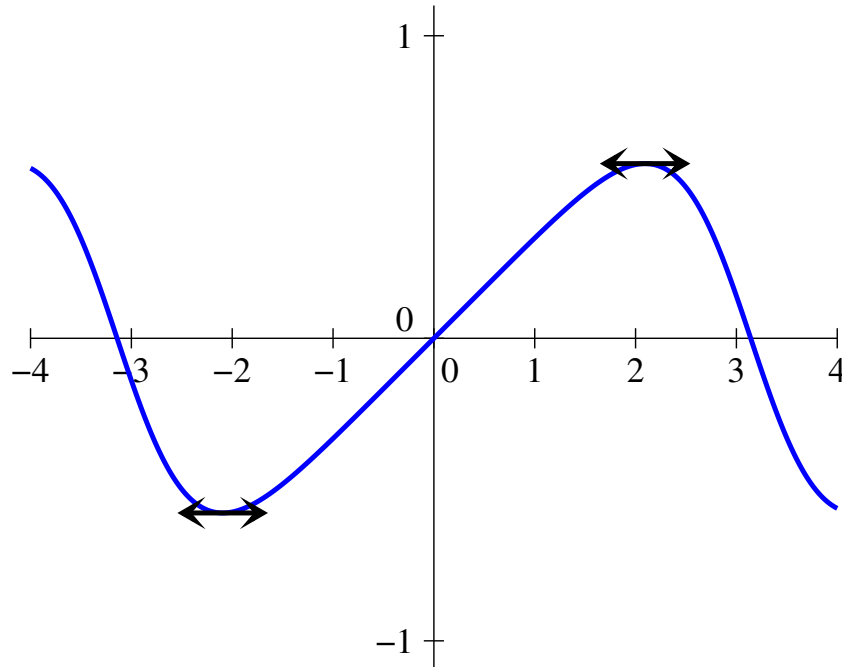
- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ (comme $\cos(x) \geq -1$, le dénominateur ne peut pas s'annuler), bien entendu 2π -périodique, mais aussi impaire. On peut donc se contenter d'une étude sur l'intervalle $[0, \pi]$. Calculons simplement la dérivée $f'(x) = \frac{\cos(x)(2 + \cos(x)) + \sin^2(x)}{(2 + \cos(x))^2} =$

$\frac{2\cos(x)+1}{(2+\cos(x))^2}$ en utilisant la formule $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ pour simplifier le numérateur.

Notre dérivée est donc du signe de $2\cos(x)+1$, elle est positive quand $\cos(x) \geq -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire (dans notre intervalle d'étude) si $x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$. On calcule $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, mais aussi tant qu'on y est $f(\pi) = 0 = f(0)$. Voici le tableau de variations de f sur une période complète :

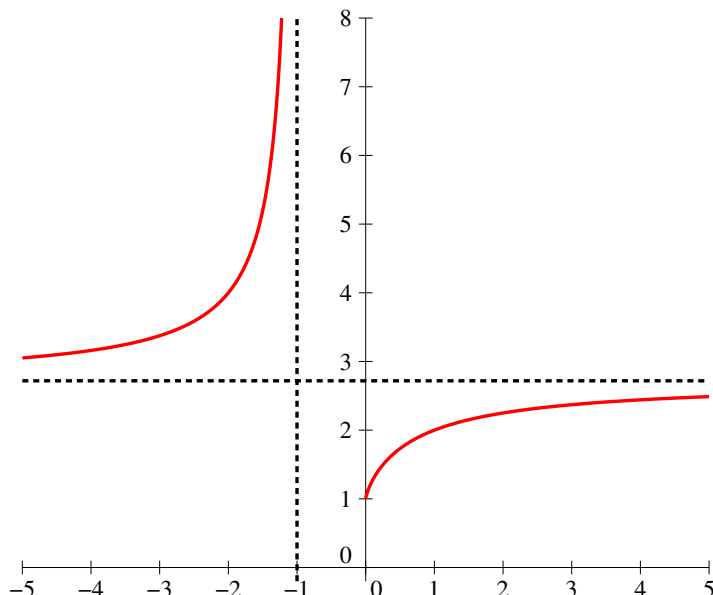
x	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Et encore une courbe :



- On commence bien sûr par mettre sous forme exponentielle : $f(x) = e^{x \ln(1+\frac{1}{x})}$, cette fonction étant définie sur $] -\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ (pour que f soit définie, on doit avoir $1 + \frac{1}{x} > 0$, ce qui est toujours vrai si $x > 0$, mais si $x < 0$ on doit avoir $\frac{1}{x} > -1$, soit $x < -1$). La fonction est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée $f'(x) = \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right) e^{x \ln(1+\frac{1}{x})}$. La parenthèse n'ayant pas un signe évident, on pose $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$, fonction qui a pour dérivée $g'(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$. La fonction g est donc croissante sur $] -\infty, -1[$. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ (calcul immédiat), g et donc f' sont positives sur $] -\infty, -1[$. Sur $]0, +\infty[$, au contraire, g est décroissante, mais on a de même une limite nulle en $+\infty$, donc f' est à nouveau positive sur cet intervalle. La fonction f est donc croissante sur chacun de ses deux intervalles de définition. Il ne reste plus qu'à calculer les limites : en posant $X = \frac{1}{x}$,

on constate que X tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$, et que $f(x) = e^{\frac{\ln(1+X)}{X}}$. On a dans l'exponentielle une limite classique de taux d'accroissement, qui est égale à 1, ce qui prouve que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = e$. Pas de forme indéterminée en -1 , ce qui est dans l'exponentielle tend vers $+\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$. Enfin, en 0, on peut écrire $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x \ln(1+x) - x \ln(x)$ et appliquer la croissance comparée pour prouver que ce qui est dans l'exponentielle tend vers 0 et en déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. On conclut avec une dernière courbe :



De petits exercices de trigonométrie.

1. Via formule de duplication, on doit donc résoudre $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 < 0$. On effectue comme d'habitude le changement de variable $X = \cos(x)$ pour obtenir l'inéquation $2X^2 + X - 1 < 0$. Le trinôme de gauche a pour racine évidente -1 et pour deuxième racine $\frac{1}{2}$, il est donc strictement négatif quand $X \in \left]-1, \frac{1}{2}\right[$, c'est-à-dire (sur l'intervalle imposé) lorsque $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right] \setminus \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$.
2. Première méthode (en mode gros bourrin) : on utilise les formules de duplication, triplification et quadriplification des sinus. Pour obtenir cette dernière qui n'est pas dans le cours, on écrit simplement $\sin(4x) = 2\sin(2x)\cos(2x)$ (formule de duplication), soit $\sin(4x) = 4\sin(x)\cos(x)(2\cos^2(x) - 1)$ (j'ai préféré garder des cosinus pour la dernière duplication car ce sera bizarrement plus efficace que des sinus). On peut maintenant développer brutalement le membre de gauche de notre équation : $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) = \sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) + 3\sin(x) - 4\sin^3(x) + 4\sin(x)\cos(x)(2\cos^2(x) - 1) = \sin(x)(1 + 2\cos(x) + 3 - 4\sin^2(x) + 4\cos(x)(2\cos^2(x) - 1)) = \sin(x)(1 + 2\cos(x) + 3 - 4 + 4\cos^2(x) + 8\cos^3(x) - 4\cos(x)) = 2\sin(x)\cos(x)(4\cos^2(x) + 2\cos(x) - 1)$. Notre équation est donc vérifiée si $\sin(x) = 0$, soit $x \equiv 0[\pi]$; $\cos(x) = 0$, soit $x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ (on peut regrouper ces deux premiers cas sous la forme $x \equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$) ; soit enfin $4\cos^2(x) + 2\cos(x) - 1 = 0$. Pour ce dernier cas, on pose $X = \cos(x)$ et on résout l'équation du second degré $4X^2 + 2X - 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 16 = 20$, et admet deux racines réelles $X_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$, et

$X_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$. Ces deux valeurs étant comprises entre -1 et 1 , elles correspondent certainement à des cosinus d'angles, mais ces derniers ont le mauvais goût de ne pas être dans notre liste d'angles à connaître. En fait, les plus savants (et surtout ceux qui auront fait le problème de la feuille d'exercices n° 3) remarqueront qu'on obtient $x \equiv \pm \frac{2\pi}{5}[2\pi]$ ou $x \equiv \pm \frac{4\pi}{5}[2\pi]$.

Deuxième méthode (nettement plus savante) : exploitation de transformations somme-produit.

On utilise deux fois la formule $\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$, une fois sur les deux sinus extrêmes du membre de gauche de l'équation, et une autre sur les deux sinus du milieu. Ledit membre de gauche est donc égal à $2 \sin\left(\frac{5x}{2}\right) \cos\left(\frac{3x}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{5x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

L'équation est donc vérifiée si $\sin\left(\frac{5x}{2}\right) = 0$, soit $\frac{5x}{2} \equiv 0[\pi]$ et donc $x \equiv 0\left[\frac{2\pi}{5}\right]$; ou si $\cos\left(\frac{3x}{2}\right) = -\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right)$, ce qui se produit si $\frac{3x}{2} \equiv \pi - \frac{x}{2}[2\pi]$ ou si $\frac{3x}{2} \equiv \frac{x}{2} - \pi[2\pi]$. On retrouve pour ces deux derniers cas les conditions $x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $x \equiv -\pi[2\pi]$. On constate facilement que tous les cas obtenus donnent bien les mêmes solutions que celles obtenues par la première méthode (encore heureux!).

3. Il suffit de connaître ses dérivées de fonctions composées et donc constater que $\sin^6(x)$ a pour dérivée $6 \sin^5(x) \times \cos(x)$, soit quasiment ce qu'on cherche à intégrer. On a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(x) \sin^5(x) dx = \frac{1}{6} [\sin^6(x)]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 = \frac{27}{6 \times 64} = \frac{9}{128}.$$

4. Pour simplifier les calculs, notons $a = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. La formule de duplication des tangentes,

appliquée à l'angle $\frac{\theta}{2}$, donne $\tan(\theta) = \frac{2a}{1-a^2}$, première des trois formules demandées. On peut alors écrire $1 + \tan^2(\theta) = 1 + \frac{4a^2}{(1-a^2)^2} = \frac{(1-a^2)^2 + 4a^2}{(1-a^2)^2} = \frac{1+a^4+2a^2}{(1-a^2)^2} = \frac{(1+a^2)^2}{(1-a^2)^2}$.

Comme on sait que $\frac{1}{\cos^2(\theta)} = 1 + \tan^2(\theta)$, on en déduit que $\cos^2(\theta) = \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^2$. Reste à déterminer le signe de $\cos(\theta)$ avant de pouvoir prendre la racine carrée. Si $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (modulo 2π), alors le cosinus est positif. Mais dans ce cas, $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, et donc $a \in]-1, 1[$.

On a alors $\frac{1-a^2}{1+a^2} > 0$, on peut donc prendre la racine carrée sans problème. On a donc dans ce cas $\cos(\theta) = \frac{1-a^2}{1+a^2}$. En fait cette formule est toujours vraie, puisque dans l'autre

cas possible le cosinus est négatif, mais le quotient $\frac{1-a^2}{1+a^2}$ aussi, et ils sont donc aussi égaux.

Dernier calcul facile : $\sin(\theta) = \tan(\theta) \times \cos(\theta) = \frac{2a}{1-a^2} \times \frac{1-a^2}{1+a^2} = \frac{2a}{1+a^2}$.