AP n°2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

18 septembre 2020

Quelques équations et inéquations.

1. Pour que le membre de droite ait un sens, on doit avoir $x \leqslant 1$, on va donc résoudre sur l'intervalle $]-\infty, 1]$. Il faut également enlever la valeur $x = -1$, qui est une valeur interdite pour le membre de gauche. Par ailleurs, si $x < -1$, ce même membre de gauche est strictement négatif, et l'inégalité est alors nécessairement vérifiée, l'intervalle $]-\infty, -1[$ est donc inclus dans l'ensemble des solutions de notre inéquation. Si $x \in]-1, 1]$, tout est positif à gauche comme à droite, on peut élever au carré pour obtenir l'inéquation équivalente $\dfrac{1}{x^2+2x+1} \leqslant 1-x$, soit $1 \leqslant (x^2+2x+1)(1-x) = -x^3-x^2+x+1$, ce qui donne donc $x^3+x^2-x \leqslant 0$. Le membre de gauche se factorise sous la forme $x(x^2+x-1)$, et la parenthèse a pour discriminant $\Delta = 1+4 = 5$, et s'annule en $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, et en $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^3+x^2-x		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

   Dans l'intervalle qui nous concerne, on garde comme solutions les nombres dans l'intervalle $\left[0, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$. Finalement, $\mathcal{S} =]-\infty, -1[\cup \left[0, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

2. Bien sûr, on passe tout à gauche et on met au même dénominateur : $\dfrac{(2x+3)(2x-3)-4x(x-1)}{(x-1)(2x-3)} \leqslant 0$, soit en développant le numérateur (on ne touche pas au dénominateur, ça n'aurait aucun intérêt) $\dfrac{4x-9}{(x-1)(2x-3)} \leqslant 0$. Il ne reste plus qu'à faire un beau tableau de signes :

x		1		$\frac{3}{2}$		$\frac{9}{4}$	
$4x-9$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2x-3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
Q	$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$

   On conclut : $\mathcal{S} =]-\infty, 1[\cup \left]\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{4}\right]$.

3. Il nous faudrait une racine évidente. Ne nous laissons pas impressionner par les coefficients, $x = 2$ convient très bien, puisque $2^3 - 39 \times 2 + 70 = 8 - 78 + 70 = 0$. On peut donc factoriser le membre de gauche de notre équation sous la forme $(x-2)(ax^2+bx+c) = ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$. Par identification des coefficients, on trouve successivement les conditions $a = 1$, puis $b-2a = 0$ (attention, il n'y a pas de terme en x^2 dans le polynôme initial !) donc $b = 2$; $c-2b = -39$, donc $c = -35$, ce qui est cohérent avec la dernière équation $-2c = 70$. Notre deuxième facteur $x^2+2x-35$ a pour discriminant $\Delta = 4+140 = 144$ (oh

tiens, un carré parfait), et admet pour racines $x_1 = \dfrac{-2-12}{2} = -7$ et $x_2 = \dfrac{-2+12}{2} = 5$. Bref, on conclut aisément : $\mathcal{S} = \{-7, 2, 5\}$.

4. Le membre de gauche a un sens si $x \neq -1$ et $x \neq 2$ (seules valeurs pour lesquelles les valeurs absolues dans les ln ne sont pas **strictement** positives toutes les deux). Le reste du temps, on peut simplement écrire que l'inéquation est équivalente à $\ln\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right| \leqslant \ln(2)$, soit en passant à l'exponentielle $\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right| \leqslant 2$. On se débarasse des valeurs absolues : $-2 \leqslant \dfrac{x+1}{x-2} \leqslant 2$, puis on traite séparément les deux conditions : l'inéquation de gauche peut s'écrire $0 \leqslant \dfrac{x+1}{x-2} + 2 = \dfrac{3x-3}{x-2}$. Le quotient $\dfrac{3x-3}{x-2}$ est du même signe que le produit $(3x-3)(x-2)$, donc positif à l'extérieur de ses racines, sur les deux intervalles $]-\infty, 1]$ (auquel il faudra éventuellement enlever la valeur interdire -1) et $]2, +\infty[$ (là on enlève tout de suite la valeur interdite 2). L'autre inéquation s'écrit $\dfrac{x+1}{x-2} - 2 \leqslant 0$, soit $\dfrac{-x+5}{x-2} \leqslant 0$. Même raisonnement qu'auparavant, le quotient est du signe du produit, donc négatif à l'extérieur des racines (il y a un coefficient négatif devant x^2 ici), soit sur les intervalles $]-\infty, 2[$ et $[5, +\infty[$. Pour que les deux conditions soient vérifiées simultanément, on conserve $\mathcal{S} =]-\infty, 1]\backslash\{-1\} \cup [5, +\infty[$.

5. On va bien sûr commencer par poser $X = \ln(x)$ pour se ramer à l'inéquation du troisième degré $2X^3 - 5X^2 + 2X \leqslant 0$, qu'on peut bien sûr factoriser par X pour obtenir $X(2X^2 - 5X + 2) \leqslant 0$. Le trinôme $2X^2 - 5X + 2$ a pour discriminant $\Delta = 25 - 16 = 9$, et admet pour racines $X_1 = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $X_2 = \dfrac{5+3}{4} = 2$. Autrement dit, on doit étudier le signe du trinôme $X(X-2)(2X-1)$, qui est donné par le tableau suivant :

X	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2X^3 - 5X^2 + 2X$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

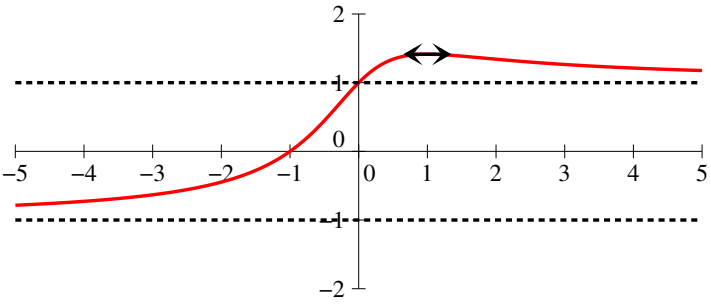
On en déduit que x est solution de notre inéquation si $X \in]-\infty, 0] \cup \left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$, soit en remontant le changement de variable $\mathcal{S} =]0, 1] \cup [\sqrt{e}, e^2]$.

Quelques études de fonctions.

- La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ puisqu'on a toujours $x^2 + 1 > 0$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_1'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - (x+1) \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-x(x+1)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$. Cette dérivée s'annule pour $x = 1$, où la fonction f_1 admet un maximum de valeur $f(1) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Pour le calcul des limites, on procède comme souvent en factorisant numérateur et dénominateur, mais attention, il y a un petit piège : $f_1(x) = \dfrac{x(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}$. Attention au fait que $\sqrt{x^2} = |x|$. Si $x > 0$, on trouve donc $f_1(x) = \dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 1$, mais si $x < 0$, $f_1(x) = -\dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -1$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

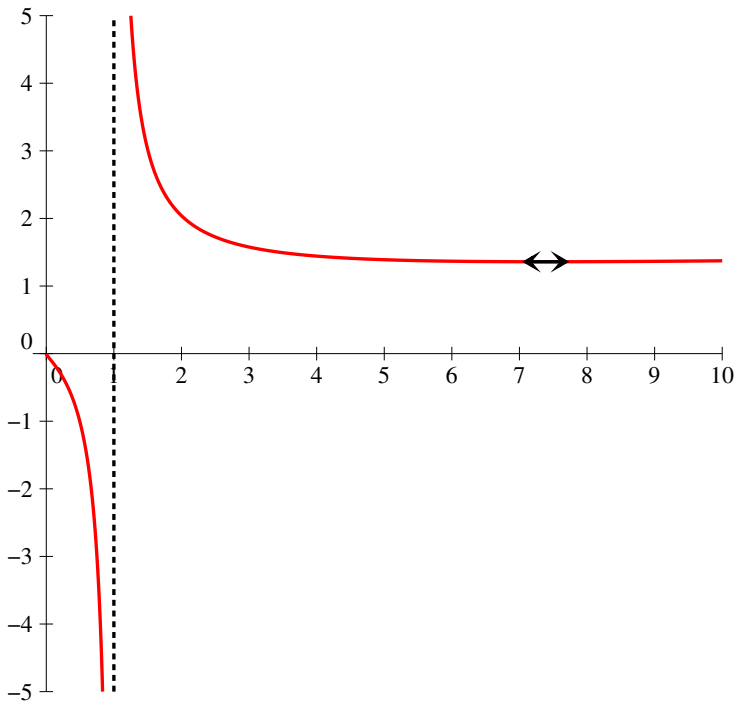
x	$-\infty$		1		$+\infty$
f_1	-1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1

Si on veut être plus précis, on peut noter que $f_1(0) = 1$, et que f_1 est du signe de $x+1$, donc positive sur $[-1, +\infty[$. On conclut avec une première courbe :

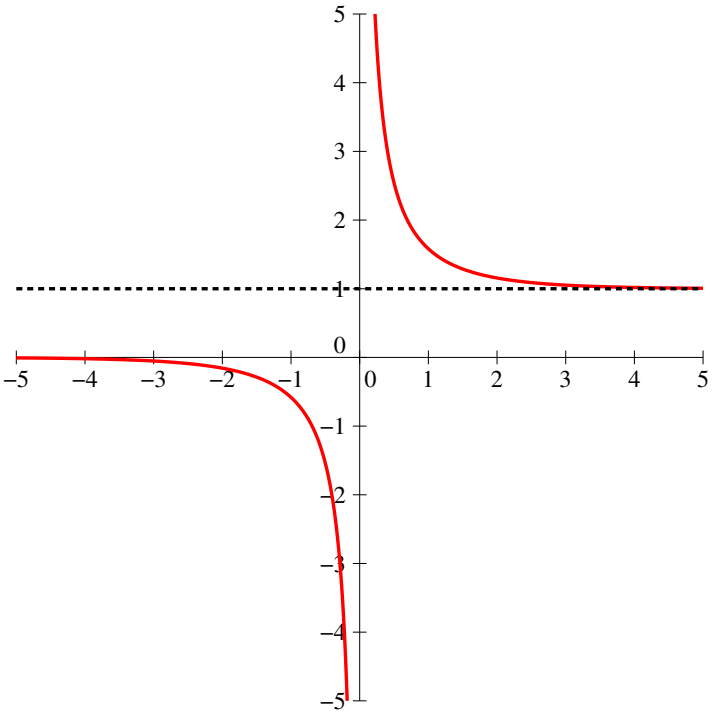


- La fonction f_2 est définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ (attention à la valeur d'annulation du logarithme !), elle est dérivable sur cet intervalle, de dérivée $f_2'(x) = \dfrac{\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x}}{\ln^2(x)} = \dfrac{\ln(x)-2}{2\sqrt{x}\ln^2(x)}$. Notre fonction est donc décroissante sur $]0,1[$ et sur $]1,e^2[$, admet un maximum de valeur $f_2(e^2) = \dfrac{e}{2}$, et est décroissante sur $]e^2,+\infty[$. On obtient sans difficulté $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = 0$ (pas de forme indéterminée ici), $\lim\limits_{x\to 1^-} f_2(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f_2(x) = +\infty$, et enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$ par croissance comparée (pour les plus curieux, il n'y a pas d'asymptote oblique). On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	0		1		e^2		$+\infty$
f_2	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\dfrac{e}{2}$	↗	$+\infty$

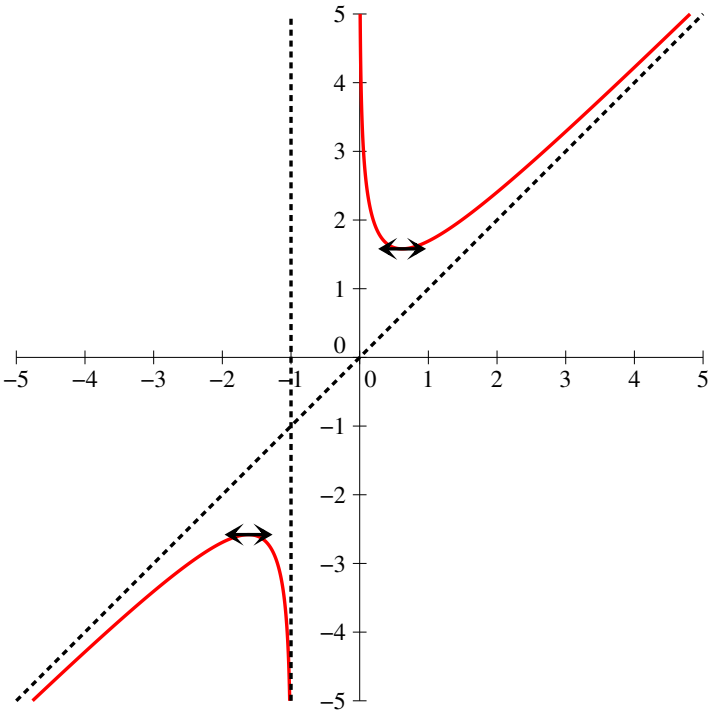


- La fonction f_3 est définie si $e^x \neq 1$, donc sur $\mathbb{R}^*$. Elle y est dérivable, de dérivée $f_3'(x) = \dfrac{e^x(e^x-1)-e^{2x}}{(e^x-1)^2} = \dfrac{-e^x}{(e^x-1)^2}$, donc elle est décroissante sur chacun de ses deux intervalles de définition. On obtient immédiatement $\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to0^-} f_3(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f_3(x) = +\infty$. Seule la limite en $+\infty$ nécessite un petit calcul, on peut par exemple diviser numérateur et dénominateur par e^x pour écrire $f_3(x) = \dfrac{1}{1-e^{-x}}$, et en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) = 1$. Je ne me fatigue pas à faire un tableau de variations, voici la courbe :

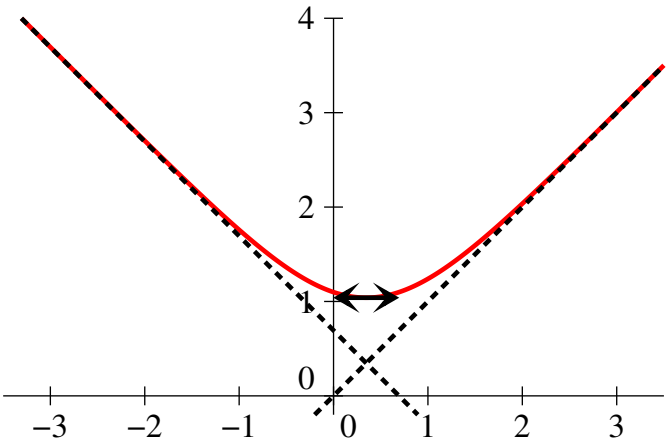


- La fonction f_4 est définie si $1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x} > 0$. Cela se produit sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ (pas

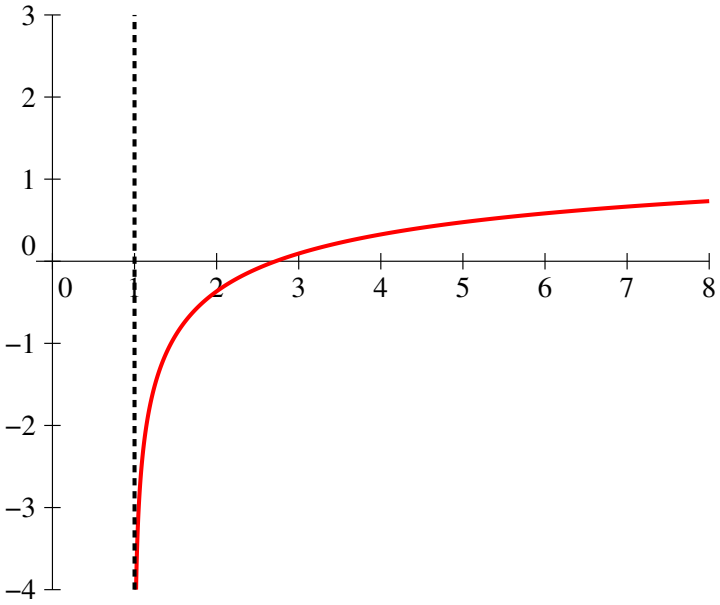
besoin de tableau de signe, j'espère !). Elle y est dérivable, de dérivée $f_4'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + 1 = 1 - \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{x^2+x-1}{x(x+1)}$. Le dénominateur de cette dérivée est toujours positif sur $\mathcal{D}_{f_4}$, et son numérateur a pour discriminant $\Delta = 1+4 = 5$, il s'annule pour $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (qui appartiennent tous les deux à notre domaine de définition). Les valeurs prises par la fonction aux deux extrema locaux n'ont vraiment aucun intérêt et sont particulièrement ignobles. Par contre, on peut constater que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, ce qui prouve directement que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f_4 en $+\infty$ et en $-\infty$ (et accessoirement donne donc les limites de la fonction à l'infini). On calcule par ailleurs sans difficulté $\lim\limits_{x\to -1} f_4(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} f_4(x) = +\infty$, ce qui donne une courbe d'allure suivante :



- La fonction f_5 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (ce qui se trouve dans le ln est toujours strictement positif), de dérivée $f_5'(x) = \dfrac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}}$. La derivée est du signe de son numérateur, donc de $e^{2x} - 2$ (quitte à factoriser par e^{-x}). Or, $e^{2x} \geqslant 2$ si $x \geqslant \dfrac{\ln(2)}{2}$. On peut calculer $f_5\left(\dfrac{\ln(2)}{2}\right) = \ln\left(\sqrt{2}+\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right) = \ln(2\sqrt{2}) = \dfrac{3}{2}\ln(2)$. De plus, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_5(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée). Avant de tracer la courbe, on peut s'intéresser aux asymptotes de f_5 : du côté de $+\infty$, on peut écrire $f_5(x) = \ln(e^x(1+2e^{-2x})) = x + \ln(1+2e^{-2x})$, avec le deuxième morceau qui a une limite nulle en $+\infty$. Cela suffit à prouver que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe de f_5 en $+\infty$. De même, la droite d'équation $y = -x + \ln(2)$ est asymptote en $-\infty$.



- La fonction f_6 est définie si $\ln(x) > 0$, donc sur $]1, +\infty[$ (et elle est positive sur $]e, +\infty[$). Pas la peine de calculer de dérivée, elle est évidemment croissante comme composée de fonctions croissantes. Pas de difficulté pour les limites non plus : $\lim\limits_{x\to 1} f_6(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_6(x) = +\infty$. Il n'y a plus qu'à tracer une allure de courbe !



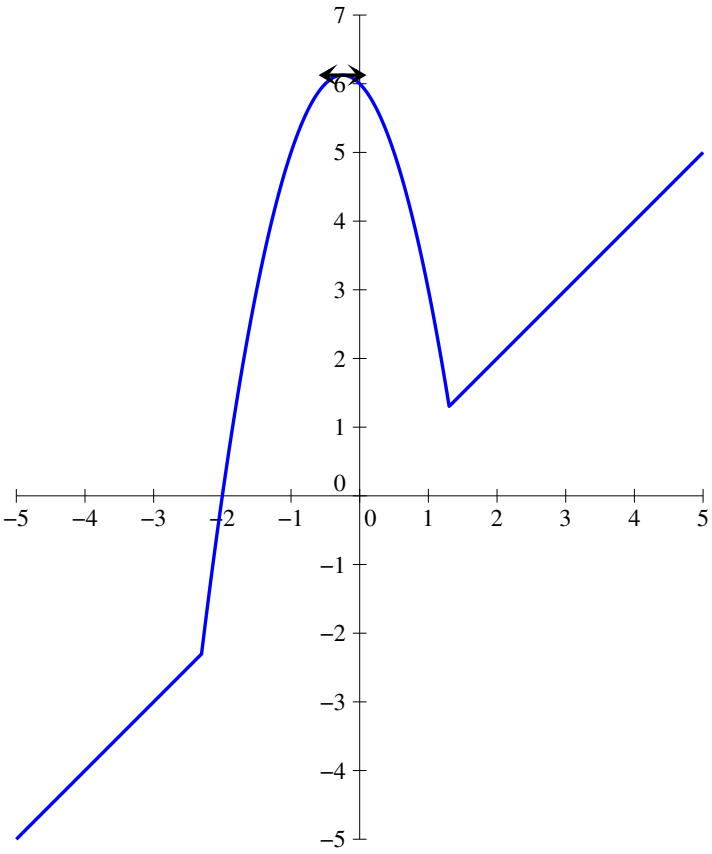
Un exercice type avec des valeurs absolues.

1. Il faut commencer par étudier le signe du trinôme $x^2 + x - 3$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 12 = 13$ et admet les superbes racines $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$. À l'extérieur de ces racines, on aura $f(x) = x^2 + x - 3 - x^2 + 3 = x$, donc tout simplement $f(x) = x$ sur chacun des deux intervalles $]-\infty, x_1]$ et $[x_2, +\infty[$. Au contraire, dans l'intervalle $[x_1, x_2]$, on a $f(x) = -x^2 - x + 3 - x^2 + 3 = -2x^2 - x + 6$.
2. Puisque 0 se trouve dans l'intervalle $[x_1, x_2]$ (c'est évident, $\sqrt{13} > 1$), l'équation $f(x) = 0$ ne peut pas avoir de solution sur $]-\infty, x_1]$ ($f(x)$ y sera négatif puisque $x \leqslant 0$ sur cet intervalle) ou sur $[x_2, +\infty[$ (où cette fois la fonction sera positive). Sur l'intervalle $[x_1, x_2]$, il faut résoudre l'équation $-2x^2 - x + 6 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 48 = 49$ et admet comme racines $x_3 = \dfrac{1+7}{-4} = -2$ et $x - 4 = \dfrac{1-7}{-4} = \dfrac{3}{2}$. Or, comme $3 < \sqrt{13} < 4$, on aura $x_1 < \dfrac{-1-3}{2} = -2$,

et $x_2 < \dfrac{-1+4}{2} = \dfrac{3}{2}$. Autrement dit, seule la racine $x_3 = -2$ se trouve dans notre intervalle de résolution, donc $\mathcal{S} = \{-2\}$. Par ailleurs, le trinôme $-2x^2 - x + 6$ est négatif à l'extérieur de ses racines, donc ici $f(x)$ sera négatif sur $[x_1, -2]$. On peut résumer le signe de $f(x)$ dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

3. La fonction f est trivialement croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty, x_1]$ et $[x_2, +\infty[$ puisqu'on a alors $f(x) = x$. Elle est par ailleurs dérivable sur $]x_1, x_2[$, de dérivée $f'(x) = -4x - 1$, qui s'annule lorsque $x = -\dfrac{1}{4}$. On peut calculer $f\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{2}{16} + \dfrac{1}{4} + 6 = \dfrac{49}{8}$. Inutile par contre de calculer $f(x_1)$ qui est égal à $x_1 \simeq -2.3$ si on tient à bien le placer sur la courbe (on exploite la valeur approchée donnée dans l'énoncé). Idem pour $f(x_2) = x2 \simeq 1.3$.

x	$+\infty$		x_1		$-\frac{1}{4}$		x_2		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{49}{8}$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

4. Voici une allure de courbe :