AP n° 11 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

7 mai 2021

Exercice 0

1. Appliquons successivement les deux méthodes proposées :
   - en partant de la formule vue en cours $\tan(x) = x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5+o(x^5)$, on obtient facilement le développement démandé en élevant au carré (et en tronquant bien sûr les termes de degré supérieur à 5, il ne restera d'ailleurs pas grand chose) : $\tan^2(x) = \left(x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5\right)^2 + o(x^5) = x^2+\dfrac{2}{3}x^4+o(x^5)$ (seul le premier double produit et le carré du premier terme sont à conserver).
   - on sait par ailleurs que $\tan'(x) = 1+\tan^2(x)$. La fonction $\tan'$ étant bien sûr de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle admet des développements limités à tout ordre obtenus en dérivant ceux de la fonction tangente. Pour obtenir de l'ordre 5, il faut partir du développement de tan à l'ordre 6, mais comme cette dernière fonction est impaire, il s'agit simplement de la même formule que celle utilisée ci-dessus, avec un $o(x^6)$ à la place du $o(x^5)$. On en déduit donc que $\tan'(x) = 1+x^2+\dfrac{2}{3}x^4+o(x^5)$, et donc que $\tan^2(x) = \tan'(x)-1 = x^2+\dfrac{2}{3}x^4+o(x^5)$.
2. N'essayons pas de deviner une relation de dépendance linéaire entre les trois vecteurs, et cherchons si la famille est libre en partant de la condition $a(2,1,-1)+b(-2,2,1)+c(2,4,-1) = 0$. On peut écrire cette égalité sous forme de système : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & - & 2b & + & 2c & = & 0 \\ a & + & 2b & + & 4c & = & 0 \\ -a & + & b & - & c & = & 0 \end{array}\right.$. On constate immédiatement que les lignes extrêmes du système sont proportionnelles (la première ligne est l'opposé du double de la dernière) donc le système ne peut pas être de Cramer, et la famille n'est pas libre. Plus précisément, en effectuant l'opération $L_2 - 2L_1$ on obtient $-3a+6b = 0$, donc $a = 2b$, puis en remplaçant dans la dernière équation $-b-c = 0$ donc $c = -b$. Autrement dit, le triplet $(2,1,-1)$ est solution non triviale du système, ou si on préfère on a la relation $2(2,1,-1)+(-2,-2,1) = (2,4,-1)$. La famille n'est donc pas libre, et ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^3$ (elle ne peut d'ailleurs pas être génératrice non plus puisqu'il s'agit d'une famille de trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension, et qu'être génératrice suffirait à en faire une base).
3. Le plus simple, de très loin, est d'écrire simplement $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x)-\ln(1-x)$ (égalité qui n'est vraie que sur l'intervalle $]-1,1[$, mais la fonction n'est de toute façon pas définie ailleurs). Les formules du cours nous assurent que $\ln(1+x) = x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$, et on peut simplement remplacer x par $-x$ (qui tend bien sûr vers 0 quand x tend vers 0) pour en déduire $\ln(1-x) = -x-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$, puis on soustrait et on trouve $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = 2x+\dfrac{2}{3}x^3+o(x^3)$.

   Naturellement il était aussi possible de commencer par écrire $\dfrac{1+x}{1-x} = (1+x)(1+x+x^2+$

$x^3+o(x^3))=1+2x+2x^2+2x^3+o(x^3)$, puis de poser $u=2x+2x^2+2x^3+o(x^3)$ et appliquer un calcul de composée pour trouver $\ln(u)=u-\dfrac{1}{2}u^2+\dfrac{1}{3}u^3+o(u^3)=2x+2x^2+2x^3-\dfrac{1}{2}(4x^2+8x^3)+\dfrac{1}{3}(8x^3)+o(x^3)=2x+\dfrac{2}{3}x^3+o(x^3)$. C'est plus long, mais on trouve bien sûr le même résultat !

4. Puisque $\sin(x)=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^4)$, on peut écrire que $\dfrac{\sin(x)}{x}=1-\dfrac{1}{6}x^2+o(x^2)$. Un équivalent classique permet alors d'affirmer que $\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)=\ln\left(1-\dfrac{1}{6}x^2+o(x^2)\right)\sim-\dfrac{x^2}{6}$. Il ne reste plus qu'à diviser par x^2 pour obtenir $\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)\sim-\dfrac{1}{6}$, la limite recherchée vaut donc $-\dfrac{1}{6}$.
5. La fonction arcsin est définie au voisinage de 0, impaire et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, elle admet donc en 0 un développement limité de la forme $\arcsin(x)=ax+bx^3+cx^5+o(x^5)$. On sait par ailleurs que $\sin(x)=x-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{120}x^5+o(x^5)$, et bien entendu que $\arcsin(\sin(x))=x$. En composant les deux développements, on doit donc avoir $x=a\left(x-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{120}x^5+o(x^5)\right)+b\left(x-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{120}x^5+o(x^5)\right)^3+c\left(x-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{120}x^5+o(x^5)\right)^5=ax-\dfrac{a}{6}x^3+\dfrac{a}{120}x^5+bx^3-\dfrac{b}{2}x^5+cx^5+o(x^5)=ax+\left(b-\dfrac{a}{6}\right)x^3+\left(c-\dfrac{b}{2}+\dfrac{a}{120}\right)x^5+o(x^5)$. L'unicité de la partie régulière du développement limité (en l'occurrence de la fonction identité) assure alors que $a=1$; $b-\dfrac{a}{6}=0$ donc $b=\dfrac{1}{6}$; et $c-\dfrac{b}{2}+\dfrac{a}{120}=0$ donc $c=\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{120}=\dfrac{9}{120}=\dfrac{3}{40}$. On retrouve donc le résultat bien connu $\arcsin(x)=x+\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{3}{40}x^5+o(x^5)$.
6. On peut aisément constater que la fonction f est bien définie au voisinage de $+\infty$, et on pose comme d'habitude $X=\dfrac{1}{x}$ pour avoir une variable qui tend vers 0. On calcule alors $f(x)=\dfrac{1}{X}\sqrt{\dfrac{\frac{1}{X}-3}{\frac{1}{X}+1}}=\dfrac{1}{X}\sqrt{\dfrac{1-3X}{1+X}}$. On peut alors écrire $\dfrac{1-3X}{1+X}=(1-3X)(1-X+X^2-X^3+o(X^3))=1-X+X^2-X^3-3X+3X^2-3X^3+o(X^3)=1-4X+4X^2-4X^3+o(X^3)$. En posant $u=-4X+4X^2-4X^3$, on développe alors $\sqrt{1+u}=1+\dfrac{1}{2}u-\dfrac{1}{8}u^2+\dfrac{1}{16}u^3+o(u^3)$, soit $\sqrt{\dfrac{1-3X}{1+X}}=1-2X+2X^2-2X^3-2X^2+4X^3-4X^3+o(X^3)=1-2X-2X^3+o(X^3)$. Autrement dit, $f(x)=\dfrac{1}{X}-2-2X^2+o(X^2)$, soit $f(x)\underset{x\to+\infty}{=}x-2-\dfrac{2}{x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. On en déduit successivement :
   - $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}x$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
   - $f(x)-(x-2)\underset{x\to+\infty}{\sim}-\dfrac{2}{x^2}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(x-2)=0$, ce qui prouve que la droite d'équation $y=x-2$ est asymptote oblique en $+\infty$ à la courbe représentative de f.
   - De plus $f(x)-(x-2)$ est équivalent à une expression négative, donc sera négatif au voisinage de $+\infty$, et la courbe sera donc en-dessous de son asymptote sur ce voisinage.
7. On écrit bien sûr l'expression à développer sous la forme $e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)}$. En anticipant la division par x, on va développer à l'ordre 4 : $\cos(x)=1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{24}x^4+o(x^4)$, donc $\dfrac{1}{\cos(x)}=\dfrac{1}{1+u}=1-u+u^2+o(u^2)$ en posant $u=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{24}x^4+o(x^4)$, ce qui permet de calculer $\dfrac{1}{\cos(x)}=1+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{24}x^4+\dfrac{1}{4}x^4+o(x^4)=1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{24}x^4+o(x^4)$. On passe tout ça dans le ln, en

utilisant à nouveau une composée (que je ne rédige pas complètement) : $\ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$. On en déduit que ce qui se trouve dans l'exponentielle initiale a pour développement limité à l'ordre 3 en 0 l'expression $\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)$. Cette expression tendant vers 0, on peut en faire le développement à l'intérieur de l'exponentielle : $\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^3 + o(x^3) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{48}x^3 + o(x^3)$.

Exercice 1

1. Il s'agit de résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ x & - & 2y & + & 2z & + & t & = & 0 \\ x & - & y & + & z & & & = & 0 \end{array}\right.$. En soustrayant les équations extrêmes on trouve $2y - t = 0$, soit $t = 2y$. On reporte alors dans la deuxième équation pour trouver $x + 2z = 0$, soit $x = -2z$. On remplace enfin tout ce qu'on peut dans la première équation : $-2z + y + z - 2y = 0$, donc $z = -y$, ce qui donne $x = 2y$, puis $(x, y, z, t) = (2y, y, -y, 2y)$, avec $y \in \mathbb{R}$. Autrement dit, $F = \text{Vect}((2, 1, -1, 2))$ et en particulier F est un espace vectoriel de dimension 1.
2. On utilise les vecteurs de la base canonique pour compléter (en exploitant le théorème de la base incomplète) :
   (a) le vecteur $(1, 0, 0, 0)$ n'étant manifestement pas colinéaire avec $(2, 1, -1, 2)$, la famille $((2, 1, -1, 2), (1, 0, 0, 0))$ est toujours libre.
   (b) le vecteur $(0, 1, 0, 0)$ ne peut pas s'écrire sous la forme $a(2, 1, -1, 2) + b(1, 0, 0, 0)$ (les deux équations obtenues pour les deux coordonnées centrales seraient $a = 1$ et $-a = 0$, ce qui est difficilement compatible), donc la famille $((2, 1, -1, 2), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0))$ est encore libre.
   (c) de même, le vecteur $(0, 0, 1, 0)$ n'est pas combinaison linéaire des trois précédents (sinon, avec des notations similaires, on aurait $2a + b = 0$, $a + c = 0$, $-a = 1$ et $2a = 0$, et les deux dernières équations sont incompatibles), donc la famille $((2, 1, -1, 2), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$ est libre, et forme donc une base de $\mathbb{R}^4$ puisqu'elle est consituée de quatre vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4.
3. Partons donc d'une combinaison linéaire annulant ces trois vecteurs : $a(1, 1, -1, 1) + b(-1, -2, 3, 7) + c(4, 4, -5, -3) = 0$. On est donc ramenés à la résolution du système $\left\{\begin{array}{ccccccc} a & - & b & + & 4c & = & 0 \\ a & - & 2b & + & 4c & = & 0 \\ -a & + & 3b & - & 5c & = & 0 \\ a & + & 7b & - & 3c & = & 0 \end{array}\right.$.
   L'opération $L_1 - L_2$ donne immédiatement $b = 0$, et on a alors $a + 4c = -a - 5c = 0$, ce qui implique $c = 0$ puis $a = 0$. La seule solution du système est donc la solution triviale, la famille est donc libre. Comme elle est génératrice de G et constituée de trois vecteurs, on en déduit que $\dim(G) = 3$.
4. Chacun des vecteurs de la base de G étudiée à la question précédente vérifie l'équation de H : $2+6-7-1 = -2-12+21-7 = 8+24-35+3 = 0$, donc ces trois vecteurs appartiennent à H, et leurs combinaisons linéaires également (H étant défini par une équation linéaire homogène, il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$). On a donc nécessairement $G \subset H$. Or, on peut écrire, en « résolvant » l'équation le définissant, que $H = \text{Vect}((1, 0, 0, 2); (0, 1, 0, 6); (0, 0, 1, 7))$, et en déduire que H est également un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 3. Si $G \subset H$ et que les deux espaces ont la même dimension, on a nécessairement $H = G$.
5. On sait déjà que $\dim(F) + \dim(G) = 1 + 3 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$. De plus, le vecteur $(2, 1, -1, 2)$ ne vérifie pas l'équation de H : $4 + 6 - 7 - 2 \neq 0$, donc $(2, 1, -1, 2) \notin G$ (on a vu précédemment

que $G = H$) et ses multiples n'appartiennent pas non plus à G, ce qui suffit à prouver que $F \cap G = \{0\}$. Ceci suffit à prouver que F et G sont bien des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

6. Plutôt que de prendre la famille donnée dans l'énoncé comme base de G, on prendra (c'est plus facile pour les calculs) la base de H (et donc de G) obtenue ensuite. On cherche donc à écrire u sous la forme $v+w$, avec $v = a(2,1,-1,2) \in F$, et $w = b(1,0,0,2)+c(0,1,0,6)+d(0,0,1,7) \in G$. Celà revient à résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2a & + & b & & & & & = & x \\ a & & & + & c & & & = & y \\ -a & & & & & + & d & = & z \\ 2a & + & 2b & + & 6c & + & 7d & = & t \end{array}\right.$. On en déduit que $b = x - 2a$; $c = y - a$ et $d = z + a$. En remplaçant dans la dernière équation, $2a + 2x - 4a + 6y - 6a + 7z + 7a = t$, soit $a = 2x + 6y + 7z - t$, dont on déduit ensuite $b = -3x - 12y - 14z + 2t$; $c = -2x - 5y - 7z + t$ et $d = 2x + 6y + 8z - t$. Autrement dit, on a $v = (4x + 12y + 14z - 2t, 2x + 6y + 7z - t, -2x - 6y - 7z + t, 4x + 12y + 14z - 2t)$, et $w = (-3x - 12y - 14z + 2t, -2x - 5y - 7z + t, 2x + 6y + 8z - t, -4x - 12y - 14z + 3t)$.

Exercice 2

1. On calcule donc $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$. Comme A et A^2 ne sont pas proportionnelles (il suffit de regarder les coefficients de la première ligne pour le constater), la famille (A, A^2) est bien une famille libre dans E.
2. On calcule maintenant $A^3 = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ -6 & 17 \end{pmatrix}$. Si la famille est liée, c'est nécessairement que A^3 est combinaison linéaire de A et de A^2, donc qu'on peut écrire $A^3 = \lambda A^2 + \mu A$. En regardant les coefficients sur la diagonale, on obtient la condition $17 = -5\lambda - \mu$. En prenant le deuxième coefficient de la première ligne, on a $9 = 6\lambda - 3\mu$, donc $3 = 2\lambda - \mu$. On soustrait ces deux conditions et on trouve $14 = -7\lambda$, donc $\lambda = -2$. On en déduit $\mu = -7$ et on vérifie qu'en effet, $A^3 = -2A^2 - 7A$. La famille (A, A^2, A^3) est donc liée.
3. Autant tout faire à la fois en déterminant explicitement cet ensemble. En notant $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, on aura $AB = \begin{pmatrix} -x - 3z & -y - 3t \\ 2x - z & 2y - t \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} -x + 2y & -3x - y \\ -z + 2t & -3z - t \end{pmatrix}$, donc la matrice B commute avec A si (x, y, z, t) est solution du système $\left\{\begin{array}{ccccccccc} & & -2y & - & 3z & & & = & 0 \\ 3x & & & & & - & 3t & = & 0 \\ 2x & & & & & - & 2t & = & 0 \\ & & 2y & + & 3z & & & = & 0 \end{array}\right.$.
Un système particulièrement trivial à résoudre : on a donc $z = -\frac{2}{3}y$ et $t = x$. Autrement dit, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ -\frac{2}{3}y & x \end{pmatrix}$, ou encore $F = \mathrm{Vect}\left(I_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}\right)$. Les deux matrices dans notre Vect n'étant pas symétriques, elle forment une base de F, qui est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.
4. On sait déjà que $I_2 \in F$ (puisqu'on l'a obtenue comme élément de notre base de F), et bien sûr $A \in F$ puisque A commute avec elle-même ! On peut aussi signaler que $A = -I_2 - 3 \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$. En tout cas, la famille (I_2, A) est une famille libre (les deux matrices ne sont pas proportionnelles) de deux éléments de F, c'est donc une base de F puisque F est un espace vectoriel de dimension 2. De même, A et A^2 sont deux matrices non proportionnelles de F (la matrice A^2 commute elle aussi avec A), donc forment nécessairement une base de F. Enfin, on obtient facilement $A^2 + 2A = -3I_2$, donc $I_2 = -\frac{1}{3}A^2 - \frac{2}{3}A$. Autrement dit,

$I_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)_{(A,A^2)}$.

5. Effectuons le même raisonnement que pour la question 3 : en notant $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, on aura $A^2B = \begin{pmatrix} -5x+6z & -5y+6t \\ -4x-5z & -4y-5t \end{pmatrix}$ et $BA^2 = \begin{pmatrix} -5x-4y & 6x-5y \\ -5z+4t & 6z-5t \end{pmatrix}$, donc la matrice B commute avec A^2 si $6z+4y=0$ et $6t-6x=0$ (les deux autres équations sont équivalentes aux deux premières), donc $t=x$ et $z=-\frac{2}{3}y$. Pas besoin d'aller plus loin, les équations sont les mêmes que celles décrivant F, donc $G=F$, et G est bien entendu un espace de dimension 2 dont (I_2, A) est une base.

Exercice 3

1. Posons $f(x) = \tan(x) - x$, la fonction f est définie et dérivable sur chacun des intervalles de la forme $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. Sa dérivée $f'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x)$ étant toujours positive, f est strictement croissante sur chacun de ces intervalles, et a des limites infinies aux bornes de l'intervalle, donc elle est bijective de $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$. En particulier, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur chacun des intervalles étudiés. Comme par ailleurs $f(n\pi) = -n\pi < 0$, cette solution se trouve nécessairement dans l'intervalle $u_n \in \left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. L'inégalité $u_n \geqslant n\pi$ prouve bien sûr immédiatement que $\lim u_n = +\infty$.

2. Puisque $u_n \in \left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, $u_n - n\pi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et on a donc $\arctan(\tan(u_n - n\pi)) = u_n - n\pi$, et donc $\arctan(\tan(u_n)) = u_n - n\pi$ par périodicité de la fonction tangente. Autrement dit, $v_n = \arctan(\tan(u_n)) = \arctan(u_n)$ puisque par définition $u_n = \tan(u_n)$. La relation rappelée dans l'énoncé permet alors de conclure que $v_n = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{u_n}\right)$.

3. On sait déjà que $\lim u_n = +\infty$, donc $\lim \frac{1}{u_n} = 0$, de même avec l'arctangente, et $\lim v_n = \frac{\pi}{2}$. Comme par définition $u_n = v_n + n\pi$, on peut écrire $v_n = \frac{\pi}{2} + o(1)$ puis $u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$ (vous en profiterez pour réfléchir à ce que signifie graphiquement ce début de développement, et vous comprendrez alors que c'est essentiellement évident).

4. Attention à bien écrire des développements d'expressions qui tendent vers 0 : $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)} = \frac{1}{n\pi} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})} = \frac{1}{n\pi}\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Comme on connait en 0 le développement de $\arctan(u) = u + o(u^2)$, on peut directement en déduire que $\arctan\left(\frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $v_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et enfin $u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

5. On recommence : $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{n\pi} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{1}{2\pi^2 n^3} + o(\frac{1}{n^3})}$
$= \frac{1}{n\pi}\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{\pi^2 n^2} - \frac{1}{2\pi^2 n^3} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{\pi^2 n^3} - \frac{1}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$
$= \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} + \frac{1}{4\pi n^3} + \frac{1}{\pi^3 n^3} - \frac{1}{8\pi n^4} - \frac{1}{3\pi^3 n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$.
Bon, on a en fait un ordre de plus que ce qui était demandé, on peut donc oublier tous les termes en $\frac{1}{n^4}$. On met ensuite tout ça dans l'arctangente en prenant en compte le terme en

$-\dfrac{1}{3}u^3$:

$\arctan\left(\dfrac{1}{u_n}\right) = \dfrac{1}{n\pi} - \dfrac{1}{2\pi n^2} + \dfrac{1}{4\pi n^3} + \dfrac{1}{\pi^3 n^3} - \dfrac{1}{3\pi^3 n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$

Et on conclut : $u_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + \dfrac{1}{2\pi n^2} + \dfrac{1}{4\pi n^3} + \dfrac{2}{3\pi^3 n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.