

Exercice à travailler n°10

PTSI B Lycée Eiffel

18 mai 2020

Encore des histoires de projection.

On se propose dans ce nouvel exercice de faire un travail plus ou moins « inverse » de celui qu'on a fait dans l'exercice à travailler n° 9. On se place dans \mathbb{R}^3 et on note p la projection sur le plan \mathcal{P} d'équation $x + y + 2z = 0$, parallèlement à la droite dirigée par le vecteur $u = (1, 2, 1)$. Le but de l'exercice est de déterminer l'expression algébrique de cette projection, en utilisant nos connaissances toutes fraîches sur les changements de bases.

1. Déterminer une base du plan \mathcal{P} . On notera v_1 et v_2 les vecteurs constituant cette base.
2. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, u)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
3. Quelle est la matrice M de p dans la base \mathcal{B} ?
4. Écrire la matrice de passage P de la base canonique vers la base \mathcal{B} . Calculer son inverse P^{-1} .
5. En notant N la matrice de p dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , quelle relation a-t-on entre les matrices M , N , P et P^{-1} ?
6. En déduire la matrice N et l'expression de $p(x, y, z)$.
7. Retrouver cette expression en décomposant un vecteur quelconque $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sous la forme $w = av_1 + bv_2 + cu$.