

NOM :
Prénom :

Interrogation Écrite n° 5

PTSI B Lycée Eiffel

23 mars 2020

1. En exploitant un calcul de développement limité, déterminer la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^3}$.
2. La famille $\mathcal{F} = (X^2 - X + 2, 3X^2 - 2X + 4, 2X^2 - 3X + 6)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$? Si non, construire une base de $\mathbb{R}_2[X]$ contenant le plus grand nombre possible d'éléments de la famille \mathcal{F} . Donner les coordonnées dans cette base du polynôme $P = X^2 - 1$.
3. On pose $f(x) = \frac{x^2}{e^x - e^{-x}}$. Effectuer l'étude locale de f en 0 (existence d'un prolongement par continuité, dérivabilité de ce prolongement, position relative de la courbe et de la tangente). On fera un petit dessin pour illustrer.
4. Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 défini par $F = \{(x, y, z, t) \mid x + y + z + t = y + 2z + t = 0\}$.
 - (a) Déterminer une base de F et préciser sa dimension.
 - (b) On note $G = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0))$. Déterminer une base de $F \cap G$ ainsi que de $F + G$. Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?
 - (c) En notant $H = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0))$, montrer que F et H sont supplémentaires.
 - (d) Déterminer deux vecteurs $f \in G$ et $h \in H$ tels que $u = f + h$, où $u = (1, 2, 3, 4)$.