

Feuille d'exercices n° 22 : Géométrie dans l'espace

PTSI B Lycée Eiffel

18 juin 2019

Exercice 1 (*)

Soient $A(0, 1, 2)$; $B(-1, 1, 1)$; $C(2; -1; 2)$; $D(4; 0; -1)$ et $E(1; 2; -2)$ cinq points de l'espace.

1. Calculer les distances AB , AD , BC et BE .
2. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CE}$.
3. Déterminer les produits vectoriels $\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{CE}$.
4. Calculer les produits mixtes $[\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}]$ et $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$. En déduire le volume du parallélépipède engendré par $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Exercice 2 (**)

Prouver la formule du double produit vectoriel : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.
En déduire l'identité $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} + (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} + (\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Exercice 3 (***)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs fixés. Déterminer tous les vecteurs $\vec{x}$ tels que $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$.

Exercice 4 (**)

Soient A , B et C trois points de l'espace, et I , J et K les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Montrer que les égalités suivantes sont vérifiées quel que soit le point M :

1. $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{KC} = \vec{0}$.
3. $[\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MK}] = [\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{MA}]$.

Exercice 5 (**)

Soient les points $A(1; 2; 3)$, $B(2; -1; 2)$ et $C(0; 1; -2)$, les droites $D_1 : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$, et

$D_2 : \begin{cases} x = 1 + 3u \\ y = -2u \\ z = 3 + 5u \end{cases}$, et les plans $\mathcal{P}_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t + 3u \\ y = -2 + t + u \\ z = 4 - t - 2u \end{cases}$, $\mathcal{P}_2 : 2x - y + 3z - 1 = 0$,
et $\mathcal{P}_3 : x + 2z - 4 = 0$.

1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}_1$.
2. Déterminer une équation paramétrique de $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$.
3. Donner une équation cartésienne du plan contenant les points A , B et C .
4. Déterminer l'intersection de D_1 et de $\mathcal{P}_2$.
5. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$ contenant D_1 et tel que D_2 soit parallèle à $\mathcal{Q}$.

- Déterminer $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$.
- Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}_2$ et de la droite (AB) .
- Donner une équation paramétrique de la droite passant par A , parallèle à $\mathcal{P}_2$ et coupant D_1 .
- Donner une équation cartésienne du plan passant par C et contenant D_1 .
- Donner une équation paramétrique de la droite, si elle existe, passant par A et sécante avec les deux droites D_1 et D_2 .

Exercice 6 (**)

Soit la droite D d'équation paramétrique
$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

- Calculer la distance $f(t)$ de O au point $M(t)$ de paramètre t de D : déterminer la valeur de t pour laquelle cette distance est minimale. En déduire les coordonnées de H , projection orthogonale de O sur D . Que vaut la distance de O à D ?
- Montrer que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - 2z = 2$ contient la droite D . Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$ contenant D et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.
- Calculer la distance de O à $\mathcal{P}$ et retrouver celle de O à D .

Exercice 7 (**)

On se place dans un cube $ABCDEFGH$ de côté 1, de façon à avoir $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $D(0, 1, 0)$ et $E(0, 0, 1)$.

- Déterminer les coordonnées des quatre sommets restants.
- Déterminer les longueurs des diagonales de face (par exemple AC) et des grandes diagonales (par exemple AG) du cube.
- Déterminer les projetés orthogonaux du point A sur chacune des diagonales de face et des grandes diagonales, et en déduire la distance de A à chaque diagonale.
- Déterminer l'aire des triangles AGH et AFH .
- Déterminer l'angle formé par chaque diagonale (de face ou grande) avec chaque face du cube.
- Déterminer le volume des tétraèdres $ABFG$, $OFGH$ (O étant le centre du cube) et $AIJO$ (I étant le milieu de $[EF]$ et J le centre de la face (BCF)).
- Montrer que le plan passant par O et perpendiculaire à (AG) a une intersection avec le cube qui est un hexagone régulier.

Exercice 8 (** à ***)

Dans un tétraèdre régulier de côté 1, déterminer :

- la hauteur du tétraèdre (distance entre un sommet et son projeté orthogonal sur la face opposée).
- le volume du tétraèdre.
- la distance entre deux arêtes non coplanaires.
- l'angle entre deux faces.

Exercice 9 (*)

Donner une équation cartésienne de chacune des sphères suivantes (en précisant leur centre et leur rayon), et étudier leur intersection avec le plan $\mathcal{P} : x + y + z - 3 = 0$, ainsi que leurs intersections deux à deux :

- $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$

- $x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 6z + 12 = 0$
- $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z + \frac{3}{2} = 0$

Exercice 10 (**)

Déterminer le centre A et le rayon R de la sphère circonscrite au tétraèdre dont les faces ont pour équations cartésiennes $x + y + z = 0$, $x + y - z = 2$, $x - y + z = 4$ et $-x + y + z = 6$ (on pourra commencer par déterminer les coordonnées des sommets du tétraèdre).

Exercice 11 (***)

Pour tout réel m , on considère l'ensemble $\mathcal{S}_m$ des points qui vérifiant l'équation

$$x^2 - (2m + 2)x + y^2 + (2m - 2)y + z^2 - 4mz - 6m - 4 = 0$$

1. Vérifier que, pour tout m , $\mathcal{S}_m$ est une sphère dont on précisera le centre O_m et le rayon R_m .
2. Quel est le lieu décrit par les centres O_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$?
3. Deux sphères de la famille peuvent-elle avoir le même centre? Le même rayon? À quelles conditions?
4. Déterminer l'ensemble des points appartenant simultanément à toutes les sphères $\mathcal{S}_m$.
5. Déterminer l'ensemble des points par lesquels ne passe aucune des sphères $\mathcal{S}_m$.
6. Donner, pour tout réel m , une équation du plan $\mathcal{P}_m$ passant par O_m et perpendiculaire à (OO_m) .
7. Déterminer l'ensemble des points appartenant à tous les plans $\mathcal{P}_m$.
8. Caractériser l'intersection $\mathcal{P}_m \cap \mathcal{S}_m$.
9. Montrer que, si $m \neq m'$, $\mathcal{P}_m \cap \mathcal{P}_{m'}$ est une droite dont on donnera une équation paramétrique.
10. Donner une équation de l'ensemble $\mathcal{Q}$ des points par lesquels passe au moins un plan $\mathcal{P}_m$. Le point O appartient-il à $\mathcal{Q}$?

Exercice 12 (***)

On considère, dans un repère orthonormé, les points $A(0, 0, 0)$; $B(2, 1, -1)$ et $C(1, 1, 1)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, en déduire que les points A , B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer une équation du plan (ABC) .
3. Déterminer le rayon de la sphère de centre $M_k(0, 0, k)$ tangente au plan (ABC) . Combien y a-t-il de sphères de rayon 2 parmi celles-ci? On note $\mathcal{S}$ celle correspondant à la plus grande valeur de k .
4. Déterminer l'ensemble des points $D(x, y, z)$ vérifiant $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ (on en donnera une équation paramétrique).
5. Parmi les points de l'ensemble précédent, combien appartiennent au plan (ABC) ? Que représentent-ils alors?
6. On note désormais $D(2, -1, 1)$. Déterminer la distance de D aux trois points A , B et C , ainsi que le projeté orthogonal de D sur (ABC) , et la distance de D à ce dernier.
7. En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.
8. Déterminer une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$, perpendiculaire à (ABC) et à (BCD) .
9. Déterminer une équation paramétrique des hauteurs issues de A et D (droites passant par le point et perpendiculaires à la face opposée) dans le tétraèdre $ABCD$. Montrer que ces droites sont sécantes en un point H appartenant également à la hauteur issue de B .
10. Déterminer un système d'équations cartésiennes de l'unique droite perpendiculaire simultanément à (AD) et à (BC) et vérifier que H appartient à cette droite.