

Feuille d'exercices n°1 : Logique et calcul

PTSI B Lycée Eiffel

7 septembre 2017

Exercice 1 (**)

Exprimer les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs (f étant une fonction réelle) :

- L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
- La fonction f est constante.
- Tout réel a (au moins) un antécédent par f .
- La fonction f ne prend pas de valeur négative.
- Tout réel a (au moins) deux antécédents par f .
- La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.
- La courbe représentative de f coupe celle de la fonction \ln .

Exercice 2 (** à ***)

Parmi les propositions suivantes, déterminer lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. On essaiera de justifier les affirmations vraies, et de donner des contre-exemples aux affirmations fausses :

- $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 2$
- $\exists x \in \mathbb{N}, 2 < x < 4$
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$
- $\forall x > 0, \exists y > 0, y < x$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p = 2n$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n(n+1) = 2p$
- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y^2$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > 0, y = \ln(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \neq x, \exists z \in \mathbb{Q}, x < z < y$

Exercice 3 (*)

Énoncer la négation de chacune des propositions de l'exercice 2 (avec des quantificateurs, bien entendu).

Exercice 4 (*)

Les énoncés suivants sont-ils équivalents ?

- « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ » et « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ ».
- « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$ » et « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ ou $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ ».

Dans le cas où il n'y a pas équivalence, préciser l'implication fautive et en donner un contre-exemple.

Exercice 5 (*)

Factoriser ou développer (les deux quand ça a un sens) les expressions suivantes :

- $A = (3x + 1)^4$
- $B = 2x^2 - 12x + 18$
- $C = 4x^2 - 16$
- $D = (2x - 6)(x + 2) - (x + 1)(x - 3) + 2x(3 - x)$
- $E = (2x + 1)^3 + (2x + 1)^2 + 2x + 1$

Exercice 6 (*)

Simplifier les expressions suivantes :

- $A = \frac{2}{5}$
- $B = (\sqrt{2} + 5\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$
- $C = \frac{3\sqrt{72}}{2\sqrt{162}}$
- $D = \frac{2^5 \times 25 \times 3^{-4} \times 36}{3^8 \times 15 \times 100}$
- $E = \frac{2}{3} - \frac{5}{12} + \frac{1}{9} - \frac{5}{6}$
- $F = \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}}}$
- $G = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

Exercice 7 (*)

On se place dans \mathbb{R} et on considère les ensembles $A = [4; 7]$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 5\}$, et $C = \mathbb{N}$. Donner l'expression la plus simple possible pour chacun des ensembles suivants : $A \cup B$; $A \cap C$; $\mathbb{R} \setminus B$; $A \cap \bar{C}$; $(A \cup B) \cap C$; $A \cup (B \cap C)$; $\bar{A} \cap (\bar{B} \cup C)$.

Exercice 8 (***)

Déterminer pour chacune des relations suivantes s'il s'agit ou non d'une relation d'ordre, et si la relation d'ordre éventuelle est totale. On déterminera également dans ce cas si l'ensemble admet un plus grand et un plus petit élément.

1. relation de parallélisme sur l'ensemble des droites du plan.
2. relation d'inclusion sur l'ensemble de tous les sous-ensembles de \mathbb{R} .
3. relation R définie par $aRb \Leftrightarrow a^b \leq b^a$ sur \mathbb{N}^* , puis sur $\{3, 4, \dots\}$.
4. relation $fRg \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)$ définie sur l'ensemble de toutes les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
5. relation $(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow |x' - x| \leq y' - y$ sur \mathbb{R}^2 . Le disque trigonométrique (centré en l'origine et rayon 1) possède-t-il un plus grand élément pour cette relation ? Une borne supérieure ?

Exercice 9 (* à ***)

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$
2. $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$
3. $x = \sqrt{x} + 2$
4. $x^3 + 5x^2 \leq 6x$
5. $\frac{2x - 3}{x^2 - 4} < 1$
6. $(m - 1)x^2 - 2(m - 2) + m + 1 = 0$ (on distinguera des cas suivant les valeurs du paramètre m si besoin).

Exercice 10 (**)

Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leq y$. On note $m = \frac{x+y}{2}$ (moyenne arithmétique), $g = \sqrt{xy}$ (moyenne géométrique) et $h = \frac{2xy}{x+y}$ (moyenne harmonique). Démontrer que $x \leq h \leq g \leq m \leq y$.

Exercice 11 (***)

Soient x, y et z trois réels vérifiant $x \in [1; 4]$; $2 \leq y \leq 5$ et $|z| < 3$. Déterminer un encadrement le plus précis possibles des expressions suivantes :

- $2x - 3y + 1$
- $\frac{z}{2}$
- $\frac{1}{z-2}$
- $\frac{x(z-4)}{y-1}$
- $x(y-3)$
- $\frac{3x}{y+1}$
- $x^2 - 4x + 4$
- $\sqrt{xy} - 3e^{2-z}$

Exercice 12 (* à **)

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $|x - 3| \geq 5$
2. $|2x - 4| = |3x + 2|$
3. $|x^2 - 8x + 11| = 4$
4. $|x + 3| + |3x - 1| < -2$
5. $|x - 2| \geq |4x + 2|$
6. $|2x - 3| + |3 - x| - |x - 7| = 2$
7. $|e^x - 3| < 1$
8. $\sqrt{|x^2 - 1|} = x - 5$
9. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles l'équation $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x + 3} = k$ admet deux solutions distinctes positives.

Exercice 13 (**)

Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{5}$. Calculer $\left| \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right|$.

Exercice 14 (**)

Représenter graphiquement les fonctions suivantes :

1. $f(x) = |2x - 1| - 4$
2. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$
3. $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\sqrt{|x^2 - 9|}$