Feuille d'exercices n°17 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

9 mai 2017

Vrai-Faux

1. Faux, ça c'est la définition d'événements incompatibles.
2. Vrai.
3. Faux, ce qui est écrit est la probabilité de B sachant A.
4. Faux, il faut remplacer $P(A_i \cap B)$ par $P_{A_i}(B)$ (ou supprimer le produit par $P(A_i)$).
5. Faux, ça ne suffit pas, il faut en plus que $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$.

Exercice 1 (**)

L'univers ressemble à ceci : $\Omega = \{(1,1,1,1); (1,1,1,2); \dots ; (6,6,6,6)\}$. On a $|\Omega| = 6^4 = 1296$.

1. Il y a six cas favorables, soit une probabilité de $\dfrac{6}{6^4} = \dfrac{1}{216} \simeq 0.0046$.
2. Il faut bien entendu faire attention qu fait qu'il ne s'agit pas du complémentaire de la question précédente. Pour avoir quatre chiffres différents, il y a $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ cas favorables, soit une probabilité de $\dfrac{360}{1296} = \dfrac{5}{18} \simeq 0.28$.
3. Le plus simple est de faire la liste des combinaisons possibles : $(1,2,3,4); (2,3,4,5); (3,4,5,6); (4,3,2,1); (5,4,3,2); (6,5,4,3)$, ce qui laisse la même probabilité qu'à la première question.

Exercice 2 (*)

Une représentation sous forme d'arbre ou, pour faire plus savant, la formule des probabilités composées, permet d'obtenir rapidement les valeurs souhaitées. La probabilité que le premier joueur gagne vaut $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$. Pour le deuxième, il faut que le joueur 1 tire une boule noire, puis que lui-même tire une boule blanche sur les cinq boules restant dans l'urne, soit une probabilité de $\dfrac{4}{6} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{15}$. De même, le troisième joueur gagne avec probabilité $\dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{5}$, le quatrième avec une probabilité $\dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{15}$. Enfin, le dernier joueur gagne avec une probabilité $\dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{2} = \dfrac{1}{15}$. Notons que la somme de ces cinq probabilités vaut $\dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{15} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{15} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{5+4+3+2+1}{15} = 1$, ce qui est tout à fait normal puisqu'il y a quatre boules noires dans l'urne, ce qui implique qu'avec des tirages sans remise, l'un des cinq joueurs va nécessairement tirer une boule blanche.

Exercice 3 (**)

Commençons par constater qu'il y a $10^6 = 1\ 000\ 000$ de téléphones au total.

1. Les numéros commençant par 01 sont au nombre de 10^4, ce qui laisse une probabilité de $\dfrac{10^4}{10^6} = \dfrac{1}{100}$.
2. On a cette fois-ci $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$ numéros possibles, soit une probabilité de $\dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{10^6} = \dfrac{189}{1\ 250}$.
3. Il ne faut pas oublier de tenir compte de la position des deux 5 : il y a $10^4 \times \dbinom{6}{2}$ numéros possibles, soit une probabilité de $\dfrac{10^4 \times 15}{10^6} = \dfrac{3}{20}$.
4. Ca c'est facile : 5^6 numéros, et une probabilité de $\dfrac{1}{2^6} = \dfrac{1}{64}$.
5. Il suffit de choisir les six chiffres apparaissant dans le numéro pour connaitre le numéro (puisque l'ordre sera alors imposé), ce qui donne $\dbinom{10}{6} = 210$ numéros possibles, et une probabilité de $\dfrac{210}{10^6} = \dfrac{21}{100\ 000}$.

Exercice 4 (***)

Il y ici deux univers raisonnables pour les résultats. On peut ne pas tenir compte de l'ordre et prendre pour Ω l'ensemble des sous-ensembles à 5 éléments de l'ensemble des 25 boules de l'urne, soit $|\Omega| = \dbinom{25}{5}$, mais également choisir de travailler avec des arrangements, auquel cas $|\Omega| = 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21$. Nous choisissons ici le premier univers, constitué de combinaisons.

1. Il y a $\binom{15}{5}$ tirages favorables, soit une probabilité de $\dfrac{\binom{15}{5}}{\binom{25}{5}} \simeq 0.057$.
2. On a introduit un ordre, il faut changer d'univers ou plus simplement calculer la proba boule par boule (autrement dit à l'aide de la formule des probabilités composées), elle vaut $\dfrac{15}{25} \times \dfrac{10}{24} \times \dfrac{9}{23} \times \dfrac{14}{22} \times \dfrac{13}{21} = \dfrac{39}{1012} \simeq 0.039$.
3. On peut revenir à notre premier univers, les tirages favorables sont ceux constituées de cinq boules vertes et ceux constitués de quatre boules vertes et d'une boule blanche (union disjointe), donc la proba vaut $\dfrac{\binom{15}{4} \times \binom{10}{1} + \binom{15}{5}}{\binom{25}{5}} \simeq 0.313$ (on a séparé l'événement en deux cas disjoints).
4. De la même façon que précédemment, la proba vaut $\dfrac{\binom{15}{3} \times \binom{10}{2}}{\binom{25}{5}} \simeq 0.385$. Dans les deux dernières questions, si on a décidé de travailler avec des arrangements, on fera bien attention au fait que l'ordre des tirages n'est pas imposé dans l'énoncé (contrairement à la deuxième question), ce qui laisse plus de cas favorables.

Dans le cas des tirages avec remise, on est de toute façon obligés de travailler avec des listes, donc $|\Omega| = 25^5$.

1. Il y a 15^5 tirages favorables, donc une probabilité de $\dfrac{15^5}{25^5} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^5 \simeq 0.078$.
2. Il y a $15 \times 10 \times 10 \times 15 \times 15$ tirages favorables, soit une probabilité de $\dfrac{15^3 \times 10^2}{25^5} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^3 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 \simeq 0.035$.

3. Soit on obtient cinq vertes (15^5 cas), soit quatre vertes et une blanche, ce qui correspond à $15^4 \times 10 \times 5$ cas (il ne faut pas oublier de multiplier par 5 pour tenir compte du choix de la position de la boule blanche), donc une probabilité de $\dfrac{15^5 + 15^4 \times 10 \times 5}{25^5} \simeq 0.337$.
4. Là encore, la seule difficulté est de ne pas oublier le choix de la position des deux blanches, la probabilité vaut $\dfrac{\binom{5}{2} \times 15^3 \times 10^2}{25^5} \simeq 0.346$.

Exercice 5 (***)

1. Soit A gagne au premier lancer (une chance sur deux), soit il gagne à son deuxième lancer, ce qui implique que lui-même et B aient perdu au premier lancer, c'est-à-dire que les trois premiers lancers soient FPP, ce qui se produit avec probabilité $\dfrac{1}{8}$; soit il gagne à son troisième lancer, probabilité $\dfrac{1}{32}$ (même raisonnement qu'avant), soit au total une proba de $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{32} = \dfrac{21}{32} \simeq 0.656$ (les trois cas étant bien sûr incompatibles).
2. Par un raisonnement très similaire à la première question, la probabilité de victoire du joueur B vaut $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{64} + \dfrac{1}{2^8} + \dfrac{1}{2^{10}} \simeq 0.333$ (les tirages faisant gagner le joueur B sont FF ; $FPFF$; $FPFPFF$; $FPFPFPFF$ et $FPFPFPFPFF$).
3. Il reste une proba de $\dfrac{1}{2^{10}} \simeq 0.000098$ que personne n'ait gagné après dix lancers (5 chacun), le seul cas favorable étant $FPFPFPFPFP$.
4. C'est un calcul de probabilité conditionnelle : la probabilité que A gagne vaut $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{32} + \dfrac{1}{128} + \dfrac{1}{512} = \dfrac{341}{512}$; la probabilité que quelqu'un ait gagné est le complémentaire de la probabilité calculée à la question précédente, elle vaut $1 - \dfrac{1}{2^{10}} = \dfrac{1\ 023}{1\ 024}$. La probabilité conditionnelle cherchée est donc de $\dfrac{341}{512} \times \dfrac{1\ 024}{1\ 023} = \dfrac{2}{3}$. Je vous laisse voir pourquoi ce résultat est intuitivement normal.

Exercice 6 (***)

1. Puisque tout est distinguable, il y a 4 possibilités de rangement pour chaque boule, soit $4^5 = 1\ 024$ rangements possibles au total. Autrement dit, $|\Omega| = 1\ 024$.
2. Il y a quatre rangements pour lesquels toutes les boules sont dans la même boite (un pour chaque boite), soit une probabilité de $\dfrac{4}{1\ 024} = \dfrac{1}{256} \simeq 0.004$.
3. Commençons par choisir les deux boites non vides, ce qui laisse $\dbinom{4}{2} = 6$ possibilités. Une fois ce choix effectué, il y a 2^5 façons de caser les cinq boules dans nos deux boites, mais il faut en enlever deux si on veut que nos deux boites ne soient pas vides (les deux pour lesquelles une des deux boites recueille toutes les boules). Cela fait donc finalement $6 \times (2^5 - 2)$ cas favorables, soit une probabilité de $\dfrac{6 \times 30}{1\ 024} = \dfrac{45}{256} \simeq 0.178$.
4. On peut répartir les cinq boules comme suit si on veut exactement une boite vide : $3-1-1-0$ ou $2-2-1-0$. Dans le premier cas, il faut choisir la boite contenant trois boules (4 choix), les trois boules en question ($\binom{5}{3} = 10$ choix), la boite contenant la quatrième boule (3 choix) et la boite contenant la dernière boule (2 choix ; si on veut on peut remplacer ces derniers choix par le choix des deux boites non vides puis de la boule allant dans la première boite non vide, ce qui revient au même). Il y a donc $4 \times 10 \times 3 \times 2 = 240$ répartitions $3-1-1-0$.

Pour les $2-2-1-0$, il y a 4 choix pour la boite contenant une seule boule, 5 choix pour la boule allant dans cette boite, 3 choix pour la boite vide, et enfin $\binom{4}{2} = 6$ choix pour les deux boules allant dans la première des deux boites restantes, soit $4 \times 5 \times 3 \times 6 = 360$ possibilités. Finalement la probabilité d'avoir exactement une boite vide est de $\frac{360}{1\ 024} = \frac{45}{128} \simeq 0.352$.

5. On a calculé successivement les probabilités d'avoir trois, deux et une boite vide. Comme on ne peut pas avoir quatre boites vides, la probabilité de ne pas avoir de boite vide est complémentaire de la somme des précédentes, elle vaut $\frac{1\ 024 - 4 - 180 - 600}{1\ 024} = \frac{240}{1\ 024} = \frac{15}{64} \simeq 0.234$.
6. Notons A_1 « La première boite est vide » et ainsi de suite jusqu'à A_4. Le nombre de cas favorables à A_1 est $3^5 = 243$ (il faut caser les cinq boules dans trois boites), donc $P(A_1) = \frac{243}{1\ 024}$. De même pour A_2, A_3 et A_4. Par un raisonnement similaire, le nombre de cas favorables à $A_1 \cap A_2$ est $2^5 = 32$, donc $P(A_1 \cap A_2) = \frac{32}{1\ 024}$, et de même pour les autres intersection de deux évènements. Enfin, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{1\ 024}$, et de même pour les autres intersections de trois évènements. Enfin, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ est impossible. On peut appliquer la formule de Poincaré : $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_4) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_4) - P(A_3 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{4 \times 243 - 6 \times 32 + 4 \times 1 - 0}{1\ 024} = \frac{784}{1\ 024} = \frac{49}{64}$. La probabilité cherchée est le complémentaire de celle que nous venons de calculer, on retrouve $\frac{15}{64}$ comme à la question précédente.

Exercice 7 (***)

1. Pour cette question, seul le premier tour nous intéresse. Celui-ci est constituée de 32 matchs faisant s'affronter deux joueurs. Peu importe dans quel ordre ces deux joueurs ont été tirés. Il y a $\binom{64}{2}$ possibilités pour le tirage du premier match, $\binom{32}{2}$ pour le deuxième etc, jusqu'à $\binom{2}{2}$ pour le dernier match. Comme on se fiche de l'ordre des matchs, on peut diviser par 32! (le nombre d'ordres possibles) pour obtenir un total de possibilités de $\frac{64 \times 63}{2} \times \frac{62 \times 61}{2} \times \cdots \times \frac{2 \times 1}{2} \times \frac{1}{32!} = \frac{64!}{2^{32} \times 32!}$ tirages possibles.
Si on ne veut pas que deux têtes de séries se rencontrent, il y 56 choix possibles pour l'adversaire de la première tête de série (8 joueurs sur 64 sont têtes de série, donc 56 ne le sont pas), 55 pour l'adversaire de la deuxième tête de série, etc jusqu'à 49 pour l'adversaire de la huitième tête de série. Il reste ensuite à répartir les 48 concurrents restants en 24 paires, ce qui se fait de $\frac{48!}{2^{24} \times 24!}$ façons (cf le calcul ci-dessus). La probabilité qu'il n'y ait pas de matchs opposant deux têtes de séries vaut donc $\frac{56!}{48!}\frac{48!}{2^{24} \times 24!} \times \frac{2^{32} \times 32!}{64!} = \frac{2^8 \times 25 \times 26 \times \cdots \times 32}{57 \times 58 \times \cdots \times 64} \simeq 0.608$.
La probabilité cherchée est le complémentaire de celle-ci, elle vaut environ 0.392.
2. Cette fois-ci, tout ce qui nous intéresse est que nos huit têtes de série soient dans des huitièmes de tableau différents. Il y a huit huitièmes de tableau constitués chacun de huit joueurs. Si on se fiche de l'ordre à l'intérieur de chaque huitième de tableau et de l'ordre des huitièmes de tableau, il y a $\binom{64}{8} \times \binom{56}{8} \times \cdots \times \binom{8}{8} \times \frac{1}{8!} = \frac{64!}{8! \times 56!} \times \frac{56!}{48! \times 8!} \times \cdots \times \frac{8!}{8! \times 0!} \times \frac{1}{8!} = \frac{64!}{(8!)^9}$

possibilités. Si on impose une tête de série dans chaque huitième de tableau, il reste à répartir les 56 concurrents restants en 8 paquets de 7, ce qui se fait de $\dfrac{56!}{(7!)^8 \times 8!}$ (calcul très similaire au précédent), et à multiplier par 8! pour distribuer aléatoirement les huit têtes de série dans chacun de ces paquets. La probabilité cherchée vaut $\dfrac{56!}{(7!)^8} \times \dfrac{(8!)^9}{64!} = \dfrac{8^8 \times 8!}{57 \times 58 \times \cdots \times 64} \simeq 0.00379$. Autant dire que c'est très improbable.

Exercice 8 (*)

Pour bien comprendre comment ça se passe le mieux est de commencer par retraduire clairement l'énoncé en utilisant les notations ensemblistes vues en cours. Notons ici A l'événement « être malade » et B l'événement « être testé positif ». L'énoncé nous donne les probabilités suivantes : $P(A) = 0.01$; $P_A(B) = 0.95$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0.001$. On peut calculer la probabilité de B en utilisant la formule des probabilités totales : $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = 0.01 \times 0.95 + (1 - 0.01) \times 0.001 = 0.01049$. La probabilité qui nous est demandée est $P_B(A)$, qui va être obtenue par la formule de Bayes : $P_B(A) = \dfrac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)} = \dfrac{0.95 \times 0.01}{0.1049} \simeq 0.91$. On a donc une grosse majorité des gens testés positifs qui sont malades, mais les faux positifs ne sont pas vraiment négligeables.

En modifiant les données c'est encore nettement pire : désormais $P(A) = 0.001$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0.005$. On obtient alors $P(B) = 0.001 \times 0.95 + 0.999 \times 0.005 = 0.005945$, puis $P_A(B) = \dfrac{0.001 \times 0.95}{0.005945} \simeq 0.16$. Cette fois-ci, seul une personne sur six ayant testée positive est effectivement malade ! C'est en fait normal : il y a une personne sur 1 000 qui est malade (et sera donc quasi certainement testée positive) mais parmi les non malades, cinq personnes sur 1 000 sont testées positives, ce qui fait à peu près cinq fois plus de gens que la quantité de malades.

Exercice 9 (*)

Notons S l'évènement « L'individu est sans opinion » ; P : « Il est favorable à la paix » et G : « Il est favorable à la guerre ». On notera également A et B les évènements correspondant à l'appartenance à l'un des deux pays.

1. C'est une simple application de la formule des probabilités totales : $P_A(S) = 1 - P_A(G) - P_A(P) = 1 - 0.16 - 0.6 = 0.24$, et de même $P_B(S) = 0.2$, donc $P(S) = P(A) \times P_A(S) + P(B) \times P_B(S) = 0.5 \times 0.24 + 0.5 \times 0.2 = 0.22$.
2. C'est cette fois-ci la formule de Bayes qui va être utile : $P(G) = P(A) \times P_A(G) + P(B) \times P_B(G) = 0.5 \times 0.16 + 0.5 \times 0.68 = 0.42$, donc $P_G(A) = \dfrac{P(A) \times P_A(G)}{P(G)} = \dfrac{0.5 \times 0.16}{0.42} \simeq 0.19$ (la probabilité de G ayant été calculée comme au-dessus à l'aide des probabilités totales)
3. Même chose qu'au-dessus : $P(P) = 0.5 \times 0.6 + 0.5 \times 0.12 = 0.36$, donc $P_P(A) = \dfrac{P(A) \times P_A(P)}{P(P)} = \dfrac{0.5 \times 0.6}{0.36} \simeq 0.83$.

Exercice 10 (***)

Il faut utiliser la formule des probabilités totales : pour chaque entier k, on a une chance sur n de tirer l'urne numéro k, et une fois cette urne choisie, la probabilité de tirer deux boules rouges à l'intérieur vaut $\dfrac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{2}}$ (n boules au total, donc $\dbinom{n}{2}$ tirages possibles, dont $\dbinom{n-k}{2}$ où l'on tire deux boules rouges). On a donc une probabilité totale de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{2}$. Or, en faisant le changement de variable $k \to n-k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} k(k-1) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (k^2 - k) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{12} - \frac{(n-1)n}{4}$. La probabilité recherchée vaut donc $\dfrac{2n-1}{6n} - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{2n-4}{6n}$. Plus intéressant, la limite quand n tend vers $+\infty$ de cette probabilité vaut $\dfrac{1}{3}$. Autrement dit, quand n devient grand, on se rapproche d'une situation où obtenir deux boules rouges, deux blanches ou une de chaque couleur est équiprobable.

Si le tirage s'effectue avec remise, la probabilité d'obtenir deux boules rouges lorsqu'on tire dans l'urne numéro k vaut désormais $\left(\dfrac{n-k}{n}\right)^2$, soit une probabilité totale de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{n-k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (n^2 + k^2 - 2nk) = \frac{1}{n^3}(n^3 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2(n+1)) = 1 + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} - \frac{n+1}{n} = \frac{(n+1)(2n+1) - 6n}{6n^2} = \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2}$. Cette probabilité a également pour limite $\dfrac{1}{3}$.

Exercice 11 (**)

Notons T l'évènement « On lance un dé truqué » et N : « On lance un dé normal ». D'après l'énoncé, on a $P(T) = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$ et $P(N) = \dfrac{4}{5}$. De plus, $P_T(6) = \dfrac{1}{2}$ et $P_T(1) = P_T(2) = P_T(3) = P_T(4) = P_T(5) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{10}$.

1. Probabilités totales : $P(6) = P(N) \times P_N(6) + P(T) \times P_T(6) = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{30} \simeq 0.23$.
2. Formule de Bayes : $P_6(T) = \dfrac{P(T) \times P_T(6)}{P(6)} = \dfrac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{30}} = \dfrac{3}{7} \simeq 0.42$.
3. Probabilités totales puis Bayes : $P(2) = P(N) \times P_N(2) + P(T) \times P_T(2) = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{23}{150}$
   $P_2(N) = \dfrac{P(N) \times P_N(2)}{P(2)} \dfrac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{6}}{\frac{23}{150}} = \dfrac{20}{23} \simeq 0.87$ (pour calculer la probabilité d'obtenir un 2, on a utilisé les probabilités totales).

Exercice 12 (**)

Il s'agit une fois de plus d'une combinaison de probabilités totales et de formule de Bayes. Notons A : « On tire dans la première urne » et B : « On tire deux boules rouges ». On a $P(A) = \dfrac{1}{2}$; $P_A(B) = \dfrac{6}{9} \times \dfrac{5}{8} = \dfrac{5}{12}$ et $P_{\bar{A}}(B) = \dfrac{3}{9} \times \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{12}$. On en déduit dans un premier temps $P(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{12} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{4}$, puis $P_B(A) = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{5}{12}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{5}{6}$.

Dans le cas où on effectue une remise, le raisonnement est le même mais, en gardant les mêmes notations, $P_B(A) = \dfrac{6}{9} \times \dfrac{6}{9} = \dfrac{4}{9}$ et $P_{\bar{A}}(B) = \dfrac{3}{9} \times \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{9}$. On en déduit dans un premier temps

$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$, puis $P_B(A) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{9}}{\frac{5}{18}} = \frac{4}{5}$. La probabilité est légèrement plus faible que dans le cas du tirage avec remise.

Exercice 13 (**)

Commençons par traduire les hypothèses de l'énoncé : au jour 0, la place n'est pas réservée, donc $p_0 = 1$. Ensuite, en notant A_n l'évènement « La place est réservée au jour n », l'énoncé stipule que $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{9}{10}$ et $P_{\bar{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{4}{10}$. La formule des probabilités totales donne alors la formule de récurrence : $p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\bar{A_n}) \times P_{\bar{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{9}{10} \times p_n + \frac{4}{10} \times (1 - p_n) = 0.5p_n + 0.4$. La suite (p_n) est donc arithmético-géométrique, d'équation caractéristique $x = 0.5x + 0.4$, ce qui donne $x = 0.8$. On introduit la suite auxiliaire $b_n = p_n - 0.8$, qui vérifie $b_{n+1} = p_{n+1} - 0.8 = 0.5p_n + 0.4 - 0.8 = 0.5(p_n - 0.8) = 0.5b_n$. La suite (b_n) est donc géométrique de raison 0.8 et de premier terme $b_0 = -0.8$, donc $b_n = -0.8 \times (0.5)^n$ et $p_n = b_n + 0.8 = 0.8 \times (1 - 0.5^n)$. On constate que la limite de la suite p_n vaut 0.8 et que la suite est croissante, c'est-à-dire que la proportion de places réservées dans l'avion va augmenter, mais en ne dépassant pas un plafond de 80%.

Exercice 14 (***)

1. Un petit schéma peut aider, mais n'est pas obligatoire. On a bien sûr $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$ puisque la guêpe se trouve dans la pièce A au départ. Ensuite, on utilise l'énoncé, on a donc $a_1 = \frac{1}{3}$, $b_1 = \frac{2}{3}$ et $c_1 = 0$. Pour l'étape suivante, il faut utiliser la formule des probabilités totales : $a_2 = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(A_2) + P(C_1) \times P_{C_1}(A_2) = \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}b_1 = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$; de même, $b_2 = \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{2}b_2 = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$; enfin $c_2 = \frac{1}{4}b_1 = \frac{1}{6}$ (on note que $a_2 + b_2 + c_2 = \frac{5}{18} + \frac{5}{9} + \frac{1}{6} = 1$, ce qui est plutôt rassurant).
2. Il s'agit d'une simple généralisation du cas précédent utilisant toujours les probabilités totales : $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n$; $b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + c_n$.
3. Pour montrer que u_n est constante, le pus simple est de calculer u_{n+1}. On a $u_{n+1} = \frac{6}{10}a_{n+1} - \frac{3}{10}b_{n+1} = \frac{6}{10}\left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n\right) - \frac{3}{10}\left(\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n\right) = \frac{2}{10}a_n + \frac{3}{20}b_n - \frac{2}{10}a_n - \frac{3}{20}b_n = 0$. La suite u_n est donc nulle (au moins à partir de $n = 1$).
4. Tentons d'exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. On a $v_{n+1} = \frac{4}{10}a_{n+1} + \frac{3}{10}b_{n+1} = \frac{4}{10}\left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n\right) + \frac{3}{10}\left(\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n\right) = \frac{4}{30}a_n + \frac{1}{10}b_n + \frac{2}{10}a_n + \frac{3}{20}b_n = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n = \frac{5}{6}\left(\frac{4}{10}a_n + \frac{3}{10}b_n\right)$. La suite v_n est donc géométrique de raison $\frac{5}{6}$ et de premier terme $v_0 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, donc $v_n = \frac{2}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
5. On constate que $u_n + v_n = a_n$, donc $a_n = \frac{2}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$ et, comme $u_n = 0$, $b_n = 2a_n = \frac{4}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
6. On a bien entendu $c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - 3a_n = 1 - \frac{6}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$. Cette probabilité tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Exercice 15 (***)

Le nombre de jetons dans la poignée tirée peut varier entre 0 et n. Notons donc, $\forall i \in \{0;1;\dots;n\}$, A_i l'évènement « On a tiré une poignée contenant i jetons ». L'énoncé stipule que ces évènements sont équiprobables, autrement dit que $P(A_i) = \dfrac{1}{n+1}$. On notera par ailleurs simplement 1 l'évènement « On tire le jeton numéro 1 ». On a $P_{A_i}(1) = \dfrac{i}{n}$ (si on tire une poignée de i jetons et qu'il y en a n au total, on a i chances sur n qu'un jeton précis soit tiré ; si vous n'êtes pas convaincus, on peut aussi dire que $|A_i| = \dbinom{n}{i}$ et $|A_i \cap B| = \dbinom{n-1}{i-1}$ puisqu'une fois choisi le jeton 1, il reste $i-1$ jetons à tirer parmi les $n-1$ restants dans l'urne, donc $P_{A_i}(1) = \dfrac{\binom{n-1}{i-1}}{\binom{n}{i}} = \dfrac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} \times \dfrac{i!(n-i)!}{n!} = \dfrac{i}{n}$).
Les évènements A_i formant un système complet d'évènements, on peut appliquer la formule des probabilités totales : $P(1) = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} P(A_i) \times P_{A_i}(1) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{n+1} \times \frac{i}{n} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{1}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}$. Ce résultat est en fait assez prévisible : si tous les nombres de jetons possibles sont équiprobables, on tirera en moyenne la moitié des jetons, et on donc autant de chances de tirer le numéro 1 que de ne pas le tirer.

On a bien sûr de même $P(2) = \dfrac{1}{2}$. Pour déterminer si le tirage des jetons 1 et 2 est indépendant, le plus simple est de calculer $P(1 \cap 2)$ et de regarder si on obtient la même valeur qu'en faisant $P(1) \times P(2)$. Le calcul de $P(1 \cap 2)$ est très similaire à celui effectué ci-dessus : $|A_i \cap 1 \cap 2| = \dbinom{n-2}{i-2}$, donc $P_{A_i}(1 \cap 2) = \dfrac{\binom{n-2}{i-2}}{\binom{n}{i}} = \dfrac{(n-2)!}{(i-2)!(n-i)!} \times \dfrac{i!(n-i)!}{n!} = \dfrac{i(i-1)}{n(n-1)}$. On applique ensuite la formule des probabilités totales pour obtenir $P(1 \cap 2) = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{n+1} \times \frac{i(i-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)(n+1)} \sum_{i=0}^{i=n} i^2 - i = \frac{1}{n(n-1)(n+1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{2n+1-3}{6(n-1)} = \frac{1}{3}$. Cette probabilité étant différente de $P(1) \times P(2) = \dfrac{1}{4}$, les deux évènements ne sont pas indépendents. Autre façon de voir les choses : $P_1(2) = \dfrac{P(1 \cap 2)}{P(1)} = \dfrac{2}{3}$. On peut interpréter ce résultat ainsi : si le jeton 1 a été tiré, il est plus probable qu'on ait tiré une grosse poignée qu'une petite poignée, ce qui augmente nettement la probabilité que le jeton 2 ait également été tiré (mais pour être tout à fait honnête, ce résultat n'était pas évident à prévoir).

Dans le cas où ce sont les poignées qui sont équiréparties, comme il existe 2^n poignées (autant que de sous-ensembles de l'ensemble des n jetons placés dans l'urne, chaque poignée a une probabilité $\dfrac{1}{2^n}$ d'être tirée. Comme il existe $\dbinom{n}{i}$ poignées contenant i jetons, on a donc $P(A_i) = \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$. On peut alors effectuer le même type de calcul que précédemment à l'aide des probabilités totales (la probabilité conditionnelle $P_{A_i}(1)$ n'a pas de raison d'avoir changé) : $P(1) = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{i} \times \frac{i}{n} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{i=n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{i}{n} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{i=n} \binom{n-1}{i-1} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0} i = n-1 \binom{n-1}{i} = \frac{1}{2^n} \times 2^{n-1} = \frac{1}{2}$. On a utilisé vers la fin de calcul le fait que $\displaystyle\sum_{i=0} i = p \binom{p}{i} = 2^p$, qui est un résultat classique. On retrouve donc la même probabilité que tout à l'heure, ce qui est en fait normal si on se souvient que les coefficients binomiaux ont une propriété de symétrie : on a autant de chances de tirer une poignée à 0 éléments qu'une poignée à n éléments, une poignée à 1 élément qu'une à $n-1$ éléments etc, ce qui donnera toujours en moyenne une chance sur deux de tirer un jeton donné.

Comme tout à l'heure, on aura donc $P(1) \times P(2) = \frac{1}{4}$, et on cherche à calculer $P(1 \cap 2)$, toujours avec les probabilités totales en utilisant le système complet d'évènements A_i : $P(1 \cap 2) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{i} \frac{i(i-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{i=n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{i(i-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=2}^{i=n} \frac{(n-2)!}{(i-2)!(n-i)} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=2}^{i=n} \binom{n-2}{i-2} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n-2}{i} = \frac{2^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4}$. Cette fois-ci, les deux évènements sont indépendants. Comme j'en entends déjà qui se demandent « Mais pourquoi l'argument donné tout l'heure pour justifier que les évènements n'étaient pas indépendants ne serait-il plus valable dans ce cas ? », j'essaie de leur répondre : ici, la probabilité de tirer un certain nombre de jetons est fortement pondéré par le nombre de poignées contenant ce nombre de jetons. Ainsi, si on sait qu'on a tiré le jeton 1, on sait simplement que la poignée choisie fait partie de la moitié des poignées qui contiennent le jeton 1. Mais parmi celles-ci, il y en a exactement la moitié qui contiennent le jeton 2 et la moitié qui ne le contiennent pas ! En effet, parmi les sous-ensembles contenant le jeton 1, il y en a autant qui contiennent le jeton 2 et qui ne le contiennent pas, et contrairement à tout à l'heure on affecte la même probabilité à chacune.

Exercice 16 (***)

1. En utilisant les notations introduites dans la question 3 de l'énoncé, on a ici $P(M_1) = P(M_2) = p$, et le comportement des deux moteurs étant indépendant, $P(M_1 \cap M_2) = p \times p = p^2$. On en déduit que $P(M_1 \cup M_2) = P(M_1) + P(M_2) - P(M_1 \cap M_2) = 2p - p^2 = p(2-p)$.
2. Puisque l'avion à deux moteurs s'écrase dès qu'au moins l'un des deux moteurs tombe en panne, $P(A) = P(\overline{M_1 \cup M_2}) = 1 - p(2-p)$.
3. L'avion s'écrase dès qu'au moins deux des moteurs tombent en panne, soit $B = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3) \cup (M_1 \cap M_4) \cup (M_2 \cap M_3) \cup (M_2 \cap M_4) \cup (M_3 \cap M_4)$.
4. On peut bien sûr appliquer la formule de Poincaré à l'union précédente, mais comme elle est composée de six événements, ça risque d'être très lourd (en fait, beaucoup d'intersections sont vides, ce qui rend le calcul possible). Essayons une autre approche, en notant B_2 l'événement « Deux moteurs **exactement** parmi les quatre tombent en panne pendant le vol » ; et similairement pour B_3 et B_4. On a alors assez clairement $B = B_2 \cup B_3 \cup B_4$ (union disjointe puisqu'on a précisé exactement le nombre de moteurs tombant en panne). Or, $P(B_4) = p^4$ (chaque moteur tombe en panne, indépendamment les uns des autres), $P(B_3) = 4p^3(1-p)$ (en effet, on a par exemple $P(M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \overline{M_4}) = p \times p \times p \times (1-p) = p^3(1-p)$, et il faut encore choisir quel moteur parmi les quatre va survivre). Enfin, pour deux moteurs exactement, il y a $\binom{4}{2} = 6$ façons de choisir les deux moteurs qui vont tomber en panne, donc $P(B_2) = 6p^2(-1-p)^2$. Finalement, $P(B) = p^4 + 4p^3(1-p) + 6p^2(1-p)^2$.
5. Calculons donc $P(A) - P(\overline{B}) = 1 - 2p(1-p) - 1 + p^4 + 4p^3(1-p) + 6p^2(1-p) = 2p + p^2 + p^4 + 4p^3 - 4p^4 + 6p^2 - 12p^3 + 6p^4 = p(2 + 7p - 8p^2 + 3p^3)$. La parenthèse a pour racine évidente $p = 1$, on peut donc factoriser $2 + 7p - 8p^2 + 3p^3 = (p-1)(ap^2 + bp + c) = ap^3 + (b-a)p^2 + (c-b)p + c$, dont on déduit $a = 3$, $b - a = -8$ et $c - b = 7$, donc $b = -5$ et $c = 2$. On obtient $P(A) - P(\overline{B}) = p(p-1)(3p^2 - 5p + 2)$. La dernière parenthèse a pour discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$, et admet deux racines $p_1 = \frac{5+1}{6} = 1$ et $p_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3}$. Conclusion de ce passionnant calcul : $P(A) - P(\overline{B}) = 3p(p-1)^2 \left(p - \frac{2}{3}\right)$. On peut alors faire le tableau de signes suivant :

p		0		$\frac{2}{3}$		1	
$(1-p)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$
$p-\frac{3}{2}$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$P(A)-P(\overline{B})$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

6. On constate que, pour les valeurs 0 et 1, $P(A) = P(\overline{B})$, ce qui signifie que les deux moteurs ont la même probabilité de s'écraser en vol. C'est logique puisque, lorsque $p = 0$, les moteurs ne tombent jamais en panne (peu importe combien il y en a, on arrivera toujours à bon port) ; et au contraire lorsque $p = 1$, tous les moteurs tomberont systématiquement en panne, et l'avion, à deux moteurs comme à quatre, coulera.

7. Au vu du tableau de signe précédent, lorsque $p \leqslant \dfrac{2}{3}$, $P(A) < P(\overline{B})$, donc l'avion à deux moteurs est moins fiable que l'avion à quatre moteurs, il est préférable d'opter pour le quadrimoteur. Par contre, si $p \geqslant \dfrac{2}{3}$, et en supposant qu'on tienne encore à effectuer le voyage, il vaudra mieux prendre l'avion à deux moteurs (dans ce cas, on aura moins d'une chance sur neuf d'arriver vivant).

8. Notons C l'événement « L'avion à six moteurs s'écrase comme une merde au beau milieu de l'Atlantique ». On peut calculer $P(C)$ de la même façon qu'on a calculé $P(B)$: on a au choix exactement trois, quatre, cinq ou six moteurs qui vont tomber en panne, et qu'il faut choisir parmi les six moteurs de l'avion. On obtient alors $P(C) = \dbinom{6}{3} \times p^3 \times (1-p)^3 + \dbinom{6}{4} \times p^4 \times (1-p)^2 + \dbinom{6}{5} \times p^5 \times (1-p) + p^6 = 20p^3(1-3p+3p^2-p^3) + 15p^4(1-2p+p^2) + 6p^5(1-p) + p^6 = 20p^3 - 60p^4 + 60p^5 - 20p^6 + 15p^4 - 30p^5 + 15p^6 + 6p^5 - 6p^6 + p^6 = 20p^3 - 45p^4 + 36p^5 - 10p^6$. On peut enchaîner sur le calcul de $P(B) - P(C) = 6p^2 - 8p^3 + 3p^4 - 20p^3 + 45p^4 - 36p^5 + 10p^6 = p^2(6 - 28p + 48p^2 - 36p^3 + 10p^4)$. Factoriser le polynôme de degré 4 de la parenthèse ne donne pas très envie, mais on sait déjà que 1 doit en être une racine évidente (l'argument probabiliste de la question 6 tient toujours). En effet c'est le cas, donc $10p^4 - 36p^3 + 48p^2 - 28p + 6 = (p-1)(ap^3 + bp^2 + cp + d) = ap^4 + (b-a)p^3 + (c-b)p^2 + (d-c)p + d$. On a donc $a = 10$, puis $b - a = -36$, donc $b = -26$; $c - b = 48$ soit $c = 22$; et enfin $d - c = -28$ donc $d = -6$, soit $P(B) - P(C) = p^2(p-1)(10p^3 - 26p^2 + 22p - 6)$. Encore un polynôme de degré 3 dans la parenthèse, c'est ballot. Mais gros coup de pot, 1 est encore racine évidente ! On retourne factoriser dans la joie et la bonne humeur : $10p^3 - 26p^2 + 22p - 6 = (p-1)(ep^2 + fp + g) = ep^3 + (f-e)p^2 + (g-f)p - g$, dont on déduit $e = 10$, $f - e = -26$ donc $f = -16$ et $g - f = 22$ donc $g = 6$. On progresse : $P(B) - P(C) = p^2(p-1)^2(10p - 16p + 6)$. Les plus observateurs remarqueront que 1 est encore et toujours racine évidente (jamais deux sans trois) mais on peut plus prosaïquement calculer son petit discriminant $\Delta = 256 - 240 = 16$ (oui, on pouvait aussi tout factoriser par 2 avant le calcul, je sais ; ou même utiliser le petit truc du discriminant réduit que je vous ai présenté aux alentours du 15 septembre et que vous avez donc tous sereinement oublié depuis). Bref, il y a deux racines $p_1 = \dfrac{16+4}{20} = 1$ (je vous l'avais dit !) et $p_2 = \dfrac{16-4}{20} = \dfrac{3}{5}$. On est arrivés : $P(B) - P(C) = p^2(p-1)^3\left(p - \dfrac{3}{5}\right)$.
Un tableau de signe très très similaire à celui fait un peu plus haut (les paresseux ne feront même pas de tableau de signe en isolant les facteurs positifs p^2 et $(p-1)^2$, gardant le signe du trinome qu'on vient d'étudier) permet de montrer que, si $p \leqslant \dfrac{3}{5}$, $P(B) \geqslant P(C)$, ce qui prouve que l'avion à six moteurs est le meilleur (on avait déjà vu que le quatre moteurs battait le deux moteurs dans cette zone). Pour $p \geqslant \dfrac{3}{5}$, le quatre moteurs est mieux. Autrement dit, jusqu'à $p = \dfrac{3}{5}$, il faut six moteurs ; entre $\dfrac{3}{5}$ et $\dfrac{2}{3}$, quatre c'est mieux ; et au-delà de $\dfrac{2}{3}$, il faut se résoudre à placer nos maigres espoirs de survie dans l'avion à deux moteurs. On peut

conjecturer que, si on s'amusait à continuer les calculs avec des avions avec huit, dix moteurs etc., on obtiendrait des zones de plus en plus proches de $p = 0$ dans lesquelles ces nouveaux avions seraient meilleurs que les précédents. Allez, on fait le calcul avec huit moteurs pour voir ! Non, vous ne voulez pas ? Vraiment ? Et si on ajoute un nombre de pilotes égal au nombre de moteurs, chacun étant bourré au point d'avoir une probabilité q de faire crasher l'avion ? Non plus ? Pfff, ces jeunes, ils ne savent plus s'amuser...